თეიმურაზ ნადარეიშვილი

ამოცანათა კრებული კვანტურ მექანიკაში

მოცემული ამოცანათა კრებული განკუთვნილია ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის მიმართულების სტუდენტთათვის და მოიცავს არარელატივისტური კვანტური მექანიკის (კვანტური მექანიკა I) თითქმის ყველა ძირითად საკითხს. კრებულში შესულია 604 სხვადასხვა სირთულის ამოცანა, რომელთაგანაც რთულ, ვარსკლავით აღნიშნულ ამოცანებს აქვთ მითითებები. თითოეულ თავს გააჩნია მოკლე შესავალი თეორიული ნაწილი, სადაც თავმოყრილია ამოცანების ამოხსნისათვის აუცილებელი ფორმულები. კრებულს აქვს დამატებაც, რომელშიც დიდი ნაწილი უკავია სპეციალური ფუნქციების თეორიის ელემენტებს, რაც ასევე აუცილებელია ამოცანების ამოხსნისათვის, რადგანაც კვანტური მექანიკის ბევრი ამოცანა სწორედ ამ ფუნციების შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებებზე დადის.

წიგნი პირველი მცდელობაა ქართულ ენაზე ამ ტიპის ამოცანათა კრებულის შექმნისა. ამიტომ შესაძლოა იგი დაზღვეული არ იყოს ზოგიერთი ხარვეზისაგან. ავტორი მადლობელი იქნება ყველა ამგვარი ხარვეზის მითითებისათვის, რომელთაც იგი გაითვალისწინებს მომავალში უფრო სრულყოფილი და შევსებული კრებულის გამოცემისას.

სარჩევი

დამატება

თავი 1 ოპერატორები კვანტურ მექანიკაში

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

კვანტური მექანიკის მათემატიკური აპარატი მჭიდროდაა დაკავშირებული წრფივი ოპერატორების თეორიასთან, რომლის ერთ-ერთი ძირითადი დებულების თანახმად ფიზიკურ, ცდაზე დაკვირვებად სიდიდეებს შეესაბამებიან ერმიტული (თვითშეუღლებული) ოპერატორები, რომლებიც მოქმედებენ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის აღმწერი Ψ ტალღური ფუნქციების (მდგომარეობის ვექტორების) სივრცეში.

$\hat{A}$ ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ სრულდება პირობა

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2 \qquad (1.1)$$

სადაც c_1 და c_2 მუდმივი რიცხვებია, ხოლო ψ_1 და ψ_2 ნებისმიერი ფუნქციებია. $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორების კომუტატორი ასე განიმარტება

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \qquad (1.2)$$

ნებისმიერ წრფივ $\hat{L}$ ოპეარატორს შეიძლება შევუსაბამოთ *ერმიტულად შეუღლებული* $\hat{L}^+$ ოპერატორი, რომელიც ასე განიმარტება

$$\left\langle \psi_2 \middle| \hat{L}\psi_1 \right\rangle \equiv \int \psi_2^*(q)\hat{L}\psi_1(q)dq = \int \left(\hat{L}^+\Psi_2(q)\right)^* \Psi_1(q)dq \equiv \left\langle \hat{L}^+\Psi_2 \middle| \Psi_1 \right\rangle \qquad (1.3)$$

(ამასთან $\Psi_{1.2}$ ფუნქციებს გარკვეული შეზღუდვები ედება). თუ $\hat{L} = \hat{L}^+$ მაშინ ოპერატორს ეწოდება ერმიტული (თვითშეუღლებული) ოპერატორი, თუმცა ზოგადად ოპერატორის ერმიტულობისა და თვითშეუღლების ცნებები არ ემთხვევა ერთმანეთს.

$\hat{f}$ ოპეატორის საკუთარი Ψ_n ფუნქციებისა და საკუთარი f_n მნიშვნელობების განტოლება ასე განიმარტება

$$\hat{f}\Psi_n = f_n\Psi_n \qquad (1.4)$$

Ψ_n საკუთარი ფუნქციები აღწერენ სისტემის მდგომარეობას, როდესაც გარკვეული f_n მნიშვნელობა აქვს f ფიზიკურ სიდიდეს (ნებისმიერი მდგომარეობის დროს ფიზიკურ სიდიდეს არ გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობა).ეს ფუნქციები ორთონორმირებული ფუნქციებია და ადგენენ სრულ სისტემას, რაც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია გავშალოთ ამ ფუნქციებად

$$\varphi = \sum_n c_n\Psi_n \qquad (1.5)$$

სადაც

$$c_n = \left\langle \Psi_n \middle| \varphi \right\rangle = \int \Psi_n^\bullet(q)\varphi(q)d\tau_q \qquad (1.6)$$

A ფიზიკური სიდიდის საშუალო ψ მდგომარეობაში შემდეგნაირად განიმარტება

$$\left\langle A \right\rangle = \left\langle \psi^\bullet \middle| \hat{A} \middle| \psi \right\rangle = \int \psi^\bullet(q)\hat{A}\psi(q)d\tau_q \qquad (1.7)$$

$\hat{A}$ ოპერატორს ეწოდება უნიტარული, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას

$$\hat{A}^{+}\hat{A} = \hat{A}\hat{A}^{+} = 1 \quad (1.8)$$

1.1 წრფივი ოპრატორების თეორიის ძირითადი დებულებები

1.1 განიხილეთ შემდეგი ოპერატორები $(-\infty < x < \infty)$

ა) წანაცვლების $\hat{T}_a$: $\hat{T}_a\Psi(x) \equiv \Psi(x+a)$;

ბ). არეკვლის $\hat{I}$: $\hat{I}\Psi(x) \equiv \Psi(-x)$;

გ). მასშტაბის ცვლილების $\hat{M}_c : \hat{M}_c\Psi(x) \equiv \sqrt{c}\Psi(cx), c > 0$;

დ) კომპლექსური შეუღლების $\hat{K} : \hat{K}\Psi(x) \equiv \Psi^*(x)$;

ე) ორი ნაწილაკის კოორდინატების გადასმის $\hat{P}_{12} : \hat{P}_{12}\Psi(x_1, x_2) \equiv \Psi(x_2, x_1)$.

არიან თუ არა ჩამოთვლილი ოპრატორები წრფივი? იპოვეთ მათი შებრუნებული ოპერატორები.

1.2. ვაჩვენოთ, რომ ორი წრფივი ოპერატორის ჯამი (სხვაობა) ისევ წრფივი ოპერატორია.

1.3. ვაჩვენოთ, რომ ორი წრფივი ოპერატორის ნამრავლი ისევ წრფივი ოპერატორია.

1.4. აჩვენეთ, რომ $\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$

1.5. აჩვენეთ, რომ $\frac{d}{dx}x = 1 + x\frac{d}{dx}$

1.6. აჩვენეთ, რომ $x^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = x\frac{d}{dx} - 1$

1.7. ვიმოქმედოთ $\hat{A} = \left(\frac{d}{dx} + x^4\right)$ ოპერატორით რაიმე ψ ფუნქციაზე.

1.8. ვიმოქმედოთ $\hat{B} = \left(\frac{d}{dx} + A\right)^2$ ოპერატორით რაიმე ψ ფუნქციაზე, სადაც $A = const$

1.9. ვიმოქმედოთ $\hat{C} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2$ ოპერატორით რაიმე ψ ფუნქციაზე. ახსენით რატომ შეგვიძლია 1.8 და 1.9 ამოცანაში ოპერატორის როგორც ორი წევრის ჯამის კვადრატის წარმოდგენა, 1.7 ამოცანაში კი არა.

1.10. ვიმოქმედოთ $\hat{D} = \left(\frac{d}{dx} + x\right)^3$ ოპერატორით რაიმე ψ ფუნქციაზე.

1.11. ვიმოქმედოთ $\hat{L} = \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)^3$ ოპერატორით რაიმე ψ ფუნქციაზე.

1.12. ვიმოქმედოთ $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}x^2$ და $\hat{B} = \left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ ოპერატორებით შემდეგ ფუნქციებზე ა) $\cos x$ და ბ) e^x

1.13. შეადარეთ ერთმანეთს $\hat{A} = \left(x\frac{d}{dx}\right)^2$ და $\hat{B} = \left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ ოპერატორები.

1.14. აიყვანეთ კვადრატში $\hat{L} = i\hbar\vec{\nabla} + \vec{A}(\vec{r})$ ოპერატორი.
მითითება: გამოიყენეთ ტოლობა $\vec{\nabla}\vec{A}\psi = \vec{A}\vec{\nabla}\psi + div\vec{A}\psi$

1.15.* ვიპოვოთ ცხადი სახე შემდეგი ოპერატორებისა

ა) $\exp\{ia\hat{I}\}$; ბ) $\hat{L}_a \equiv \exp\left\{ax\frac{d}{dx}\right\}$

სადაც a ნამდვილი პარამეტრია, ხოლო $\hat{I}$-არეკვლის ოპერატორია.
მითითება: $\hat{F} = F(\hat{f})$ სახის ოპერატორი (ფუნქცია ოპერატორისა), სადაც $F(z)$ ფუნქციაა z-ის, (რომელიც იშლება ტეილორის მწკრივად $F(z) = \sum_n c_n z^n$) უნდა გავიგოთ, როგორც ოპერატორი $\hat{F} = \sum_n c_n \hat{f}^n$. ისარგებლეთ ამ განმარტებით.

1.16. ვიპოვოთ ოპერატორი, რომელსაც $\psi(x)$ გადაჰყავს $\psi(x+a)$-ში.

1.17. ვიპოვოთ ოპერატორი, რომელსაც $\psi(\vec{r})$ გადაჰყავს $\psi(\vec{r}+\vec{a})$-ში.

1.18. ვიპოვოთ ოპერატორი, რომელსაც $\psi(\varphi)$ გადაჰყავს $\psi(\varphi+\alpha)$-ში, სადაც φ კუთხური ცვლადია (სივრცის მობრუნების ოპერატორი α კუთხეზე).

1.19. თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორებია, იქნება თუ არა ერთმანეთის ტოლი ორი ოპერატორი $\sin(\hat{A}+\hat{B})$ და $\sin(\hat{B}+\hat{A})$

1.20.დავამტკიცოთ, რომ $\left[\hat{A},\hat{B}\hat{C}\right] = \left[\hat{A},\hat{B}\right]\hat{C} + \hat{B}\left[\hat{A},\hat{C}\right]$
და $\left[\hat{A}\hat{B},\hat{C}\right] = \hat{A}\left[\hat{B},\hat{C}\right] + \left[\hat{A},\hat{C}\right]\hat{B}$

1.21. დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია იაკობის იგივეობა

$$\left[\hat{A},\left[\hat{B},\hat{C}\right]\right] + \left[\hat{C},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right] + \left[\hat{B},\left[\hat{C},\hat{A}\right]\right] \equiv 0$$

1.22. ვაჩვენოთ, რომ ჯამის კომუტატორი ტოლია კომუტატორების ჯამის ანუ სრულდება ტოლობა

$$\left[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k\right] = \sum_{i,k}\left[\hat{A}_i, \hat{B}_i\right]$$

1.23. ვიპოვოთ კომუტატორი x და ლაპლასის Δ ოპერატორებს შორის.

1.24*. $\hat{L}$ და $\hat{M}$ ოპერატორები აკმაყოფილებენ პირობას $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$. ვიპოვოთ $\hat{A} = \hat{L}\hat{M}^2 - M^2\hat{L}$.
მითითება: $\hat{A}$-ს დავუმატოთ და დავაკლოთ $\hat{M}\hat{L}\hat{M}$ წევრები და მიღებული გამოსახულების სხვაობებში მარცხნივ და მარჯვნივ ფრჩხილებს გარეთ გავიტანოთ $\hat{M}$.

1.25*..$\hat{L}$ და $\hat{M}$ ოპერატორები აკმაყოფილებენ პირობას $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$. ვიპოვოთ $\hat{A} = f(\hat{L})\hat{M} - \hat{M}f(\hat{L})$.

1.26. მოცემულია ორი ოპერატორი $\hat{L} = x^n \dfrac{d}{dx}$ და $\hat{M} = \dfrac{d}{dx} x^m$. დაადგინეთ n-ის და m-ის რა მნიშვნელობებისათვის კომუტირებენ ეს ოპერატორები.

1.27.დავამტკიცოთ, რომ თუ $\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = 1$, მაშინ სრულდება შემდეგი ტოლობები ა) $\left[\hat{A}, \hat{B}^2\right] = 2\hat{B}$; ბ) $\left[\hat{A}, \hat{B}^3\right] = 4\hat{B}^2$; გ) $\left[\hat{A}^2, \hat{B}^2\right] = 2\left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)$

1.28.ცნობილია, რომ $\hat{A}^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2$. დაამტკიცეთ, რომ თუ $\hat{A}_1$ და $\hat{A}_2$ ოპერატორები კომუტირებენ $\hat{B}$ ოპერატორთან, მაშინ მასთან კომუტირებს $\hat{A}^2$ ოპერატორიც.

1.29. $\hat{A}$ ოპერატორი კომუტირებს $\hat{B}$ და $\hat{C}$ ოპერატორებთან. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, რომ $\hat{B}$ და $\hat{C}$ ოპერატორები კომუტირებენ?

1.30.* ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორები კომუტირებენ საკუთარ კომუტატორებთან ანუ $\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right]$, მაშინ ა) $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$ და ბ) $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}\left[\hat{A}, \hat{B}\right]$, სადაც n მთელი რიცხვია

1.31.* ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორები კომუტირებენ საკუთარ კომუტატორებთან ანუ $\left[\hat{A}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right] = \left[\hat{B}, \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\right]$, მაშინ სრულდება ტოლობა

$$\left[\hat{A}, F\left(\hat{B}\right)\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right] F'\left(\hat{B}\right)$$

სადაც $F'(x)$ აღნიშნავს $F(x)$ ფუნქციის წარმოებულს.

მითითება: ჯერ ისარგებლეთ ინდუქციის მეთოდით და აჩვენეთ, რომ $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{B}^{n-1}$ და შემდეგ $F(x)$ ფუნქცია გაშალეთ ტეილორის მწკრივად.

1.32.რაიმე λ პარამეტრზე დამოკიდებული $\hat{M}(\lambda)$ ოპერატორის წარმოებული ამ პარამეტრით შემდეგნაირად განიმარტება

$$\frac{d\hat{A}(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\hat{A}(\lambda + \varepsilon) - \hat{A}(\lambda)}{\varepsilon}$$

ამ განმარტების საფუძველზე აჩვენეთ, რომ

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\hat{A}\hat{B}\right) = \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{d\lambda}$$

მითითება: გამოიყენეთ წარმოებულის განმარტება და მრიცხველში დაუმატეთ და დააკელით $\hat{A}(\lambda + \varepsilon)\hat{B}(\lambda)$ წევრი

1.33.წინა ამოცანაში მიღებული თანაფარდობის გამოყენებით, დაამტკიცეთ, რომ

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\hat{A}^{-1}\right) = -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}$$

მითითება: გააწარმოეთ $\hat{A}\hat{A}^{-1} = 1$ ტოლობა.

1.34* დაამტკიცეთ, რომ $\hat{A}$ და $\hat{L}$ ოპერატორებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა

$$e^{\hat{L}}\hat{A}e^{-\hat{L}} = \hat{A} + \frac{1}{1!}\left[\hat{L}, \hat{A}\right] + \frac{1}{2!}\left[\hat{L}, \left[\hat{L}, \hat{A}\right]\right] + \frac{1}{3!}\left[\hat{L}, \left[\hat{L}, \left[\hat{L}, \hat{A}\right]\right]\right]..$$

მითითება: განიხილეთ s პარამეტრზე დამოკიდებული $\hat{A}(s)$ ოპერატორი

$$\hat{A}(s) = e^{s\hat{L}} A e^{-s\hat{L}}$$

და განიხილეთ მისი პირველი და მაღალი რიგის წარმოებულები λ პარამეტრით.

1.35*. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორები კომუტირებენ საკუთარ კომუტატორებთან ანუ $\left[\hat{A},\left[\hat{A},\hat{B}\right]\right]=\left[\hat{B},\left[\hat{A},\hat{B}\right]=0\right]$, მაშინ სამართლიანია ვეილის ტოლობა

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}=e^{\hat{A}+\hat{B}}e^{\frac{1}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right]}$$

მითითება: განიხილეთ ოპერატორი

$$\hat{T}(s)=e^{\hat{A}s}e^{\hat{B}s}$$

გააწარმოეთ ეს ოპერატორი s პარამეტრით და გამოიყენეთ 1.30ამოცანის შედეგები.

1.36*. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{A}$ და $\hat{B}=e^{-\beta\hat{H}}$ ოპერატორებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\left[\hat{A},e^{-\beta\hat{H}}\right]=e^{-\beta\hat{H}}\int_0^{\beta}e^{\lambda\hat{H}}\left[\hat{A},\hat{H}\right]e^{-\lambda\hat{H}}d\lambda$$

მითითება: გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ დასამტკიცებელი ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები ტოლია $\beta=0$-თვის და აჩვენეთ, რომ ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარე ერთნაირ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აკმაყოფილებენ.

1.37*. ჩათვალეთ λ მცირე პარამეტრად და იპოვეთ $\left(\hat{A}-\lambda\hat{B}\right)^{-1}$ ოპერატორის გაშლა ამ პარამეტრის მიხედვით.

მითითება: დაწერეთ ოპერატორული ტოლობა

$$\left(\hat{A}-\lambda\hat{B}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\hat{C}_n$$

გაამრავლეთ ის $\left(\hat{A}-\lambda\hat{B}\right)$ოპერატორზე და უცნობი $\hat{C}_n$ ოპერატორები იპოვეთ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეში λ პარამეტრის ხარისხების გატოლებით.

1.38. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L}=x\dfrac{d}{dx}$ და $\hat{M}=\dfrac{d}{dx}x$ ოპერატორები ერთმანეთთან კომუტირებენ.

1.39. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა) $\left[x,\hat{p}_x^2\right]$; ბ) $\left[x^2,\hat{p}_x\right]$

1.40. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა) $\left[x^2,\hat{p}_x^2\right]$ ბ) $\left[\dfrac{d^2}{dx^2},x^3\right]$

1.41. დავამტკიცოთ, რომ კომუტატორებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$ა)\ \left[\hat{p}_x,f(x)\right]=-i\hbar\frac{\partial f}{\partial x};\ ბ)\ \left[x,f(x)\right]=i\hbar\frac{\partial f}{\partial p_x}$$

სადაც $f(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა.

1.42. დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

ა) $\left[f(x),\hat{p}_x^2\right]=2i\hbar\dfrac{\partial f}{\partial x}\hat{p}_x+\hbar^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

ბ) $\left[x^2,\left[x,p_x^2\right]\right]=-4\hbar^2 x$

სადაც $f(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა.

1.43. აჩვენეთ, რომ ჰამილტონიანსთვის

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$$

სამართლიანია შემდეგი კომუტაციური თანაფარდობები

ა) $\left[\hat{H},x\right]=-\frac{i\hbar}{m}\hat{p}_x$; ბ) $\left[\hat{H},\hat{p}_x\right]=i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}$;

გ) $\left[\hat{H},\hat{p}_x^2\right]=2i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\hat{p}_x+\hbar^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

1.44*.აჩვენეთ, რომ ჰამილტონიანი

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$$

(სადაც $V(x)$ პერიოდული პოტენციალია $V(x+a)=V(x)$) კომუტირებს ტრანსლიაციის $\hat{T}(a)$ ოპერატორთან, რომელიც ასე განიმარტება $\hat{T}(a)\Psi(x)=\Psi(x+a)$.

მითითება: ისარგებლეთ ფორმულით

$$\Psi(x+a)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n\frac{d^n}{dx^n}\Psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\hat{p}^n\Psi(x)=e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}}\Psi(x)\equiv\hat{T}(a)\Psi(x)$$

1.45. დავამტკიცოთ, რომ ერგანზომილებიან შემთხვევაში თუ პოტენციური ენერგია სიმეტრიულია $V(x)=V(-x)$, მაშინ 1.1. ამოცანაში განმარტებული I ინვერსიის ოპერატორი კომუტირებს ჰამილტონის $\hat{H}=\frac{p_x^2}{2m}+V(x)$ ოპერატორთან.

1.46. ვაჩვენოთ, რომ პუასონის ფრჩხილი

$$\left\{x,\left(\cos^2\alpha\right)x\frac{d}{dx}+(\sin^2\alpha)\frac{d}{dx}x\right\}$$

სადაც $\alpha=const$, დამოკიდებული არ არის α-ზე.

1.47. ვაჩვენოთ, რომ პუასონის ფრჩხილი

$$\left\{\frac{d}{dx},\left(\cos^2\alpha\right)x\frac{d}{dx}+(\sin^2\alpha)\frac{d}{dx}x\right\}$$

სადაც $\alpha=const$, დამოკიდებული არ არის α-ზე.

1.48. გამოთვალეთ შემდეგი პუასონის ფრჩხილი

$$-i\hbar\left\{\left(\vec{a}\nabla\right),\vec{r}\right\}$$

სადაც $\vec{a}$ მუდმივი ვექტორია.

1.49. გამოთვალეთ პუასონის ფრჩხილი შემდეგი ოპერატორებისათვის

$$\hat{A}=x^{\alpha};\qquad \hat{B}=x^{\beta}\frac{d}{dx}$$

სადაც α და β ნებისმიერი რიცხვებია.

1.50. გამოთვალეთ შემდეგი პუასონის ფრჩხილი

$$\left\{\frac{d}{dx},f(x)\right\}$$

1.51. ვაჩვენოთ, რომ თუ ნებისმიერი χ ფუნქციისთათვის სრულდება ტოლობა

$$\langle \chi,\varphi \rangle = \langle \chi, f \rangle$$

მაშინ φ და f ფუნქციები ერთმანეთს ემთხვევა.

1.52. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{T}$ და $\hat{S}$ ოპერატორები ნებისმიერი φ და f ფუნქციებისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$\langle \hat{T}\varphi, f \rangle = \langle \hat{S}\varphi, f \rangle$$

მაშინ $\hat{T}$ და $\hat{S}$ ოპერატორები ერთმანეთს ემთხვევა.

1.53. ვაჩვენოთ, რომ ერმიტული ოპერატორების ნამრავლისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} = B^{+}A^{+}$

1.54. დავამტკიცოთ, რომ თუ $\hat{A}$ ერმიტული ოპერატორია, მაშინ $\hat{A}^{n}$-იც ერმიტული ოპერატორია, სადაც n მთელი დადებითი რიცხვია.

1.55. დავამტკიცოთ, რომ თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ერმიტული ოპერატორები კომუტირებენ, მაშინ $\hat{A}\hat{B}$ ერმიტული ოპერატორია.

მითითება: გამოიყენეთ ტოლობა $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} = B^{+}A^{+}$

1.56. ვაჩვენოთ, რომ $\left(\hat{A}^{+}\right)^{+} = \hat{A}$.

1.57.ვაჩვენოთ, რომ რიცხვის ერმიტულად შეუღლებული მის კომპლექსურად შეუღლებულს ემთხვევა ანუ $c^{+} = c*$

1.58.ვიპოვოთ $\hat{A} = \dfrac{d}{dx}$ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი.

მითითება: დაწერეთ $\hat{A} = \dfrac{d}{dx}$ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორის განმარტება ინტეგრალური სახით და ჩაატარეთ ნაწილობითი ინტეგრება.

1.59. ვიპოვოთ $\hat{A} = \dfrac{d^{n}}{dx^{n}}$ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი.

1.60*. ვიპოვოთ 1.17 ამოცანის $\hat{T}_{a} = e^{\vec{a}\vec{\nabla}}$ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი.

1.61*. ვიპოვოთ 1.18 ამოცანის $\hat{T}_{\alpha} = e^{i\alpha\frac{d}{d\varphi}}$ ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი, სადაც α ნამდვილი სიდიდეა.

1.62. დავამტკიცოთ, რომ ნამდვილ ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორი ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორია.

1.63. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L} = ia\dfrac{\partial}{\partial x}$ ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია, სადაც a ნამდვილი რიცხვია.

მითითება: გამოიყენეთ ერმიტულობის პირობა ინტეგრალური სახით

1.64. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L} = V(x)$ ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია.

1.65. ვაჩვენოთ, რომ $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია.

1.66. ვაჩვენოთ, რომ $\frac{d}{dx}$; $x\frac{d}{dx}$ და xp_x ოპერატორები არ არიან ერმიტული ოპერატორები.

1.67. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L}\hat{L}^+$ და $\hat{L}^+\hat{L}$ ოპერატორები ერმიტულია

1.68. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L} + L^+$ და $i\left(\hat{L} - L^+\right)$ ოპერატორები ერმიტულია

1.69. დავამტკიცოთ, რომ თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ერმიტული არაკომუტირებადი ოპერატორებია, მაშინ ა) $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ არაერმიტულია ბ) $i\left[\hat{A},\hat{B}\right]$ ერმიტულია.

1.70. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{C}$ ოპერატორი ერმიტულია, მაშინ $\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^+$ ოპერატორიც ერმიტული ოპერატორია.

1.71. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{A}$, $\hat{B}$ და $\hat{C}$ ოპერატორები ერმიტულია, მაშინ ერმიტულია $\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{B}\hat{A}$ და $i\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}\hat{A}\right)$ ოპერატორებიც.

1.72. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\hat{L}$ ოპერატორი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ

$$\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B}$$

სადაც $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორები ერმიტული ოპერატორებია.

1.73. მოცემულია $\hat{L}$ არაერმიტული ოპერატორი. რა შემთხვევაში იქნება $\hat{L}^2$ ოპერატორი ერმიტული?

მითითება: ისარგებლეთ 1.72 ამოცანის შედეგით.

1.74. ვაჩვენოთ, რომ თუ ოპერატორი ერმიტულია, მაშინ მისი შებრუნებული ოპერატორიც ერმიტულია.

1.75. ვაჩვენოთ, რომ ორი არაკომუტირებადი ერმიტული $\hat{F}$ და $\hat{G}$ ოპერატორებისათვის კომუტატორისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\left[\hat{F},\hat{G}\right] = i\hat{D}$$

სადაც $\hat{D}$ ერმიტული ოპერატორია.

1.2 საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები.საშუალოს ცნება. პროექციული და უნიტარული ოპერატორები.

1.76. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები შემდეგი ოპერატორებისა: ა) $\hat{A} = \frac{d}{dx}$ და ბ) $\hat{B} = i\frac{d}{dx}$

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ საკუთარი ფუნქციები $x \to \pm\infty$ ზღვარში სასრულო უნდა იყოს.

1.77. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A} = x + \frac{d}{dx}$ ოპერატორისა.

მითითება: განაცალეთ ცვლადები საკუთარი ფუნქციების განტოლებაში.
1.78. ვიპოვოთ საკუთარი ψ ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}=-i\dfrac{d}{dx}$ ოპერატორისა, თუ $\psi(x)=\psi(x+a)$, სადაც a მუდმივაა.
1.79. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}=i\dfrac{d}{d\varphi}$ ოპერატორისა.
მითითება: გაითვალისწინეთ საკუთარი ფუნქციების ცალსახობიდან გამომდინარე პერიოდულობის თვისება $\psi(\varphi)=\psi(\varphi+2\pi)$
1.80*. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}=\sin\dfrac{d}{d\varphi}$ ოპერატორისა.
1.81*. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}=\cos\left(i\dfrac{d}{d\varphi}\right)$ ოპერატორისა.
1.82*. 26. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}=e^{ia\frac{d}{d\varphi}}$ ოპერატორისა.
1.83*. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები $\hat{A}=\dfrac{d^2}{dx^2}+\dfrac{2}{x}\dfrac{d}{dx}$ ოპერატორისა.
მითითება: შემოიღეთ ახალი ფუნქცია $U=x\psi$ და მისთვის ამოხსენით საკუთარი ფუნქციებისა და საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება.
1.84. ცნობილია, რომ $\hat{A}=\dfrac{d^2}{dx^2}$ ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა $\Psi(x)=\cos 3x$. იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობა.
1.85. მოცემულია შემდეგი ფუნქციები $ax,\ ax^2, e^{ax},\ e^{ax^2}, \ln ax$ და $\sin ax$. აჩვენეთ ამ ფუნქციებიდან რომელი ფონქციებია საკუთარი ფუნქციები შემდეგი ოპერატორებისა ა). $\dfrac{d}{dx}$; ბ) $\dfrac{d^2}{dx^2}$.
1.86. მოცემულია ფუნქციები ა) e^{-kx^2}; ბ) x^2 და გ) $\cos kx+\sin kx$. ამ ფუნციათაგან რომელია $\hat{L}=\dfrac{d^2}{dx^2}$ ოპერატორის საკუთარი ფუნქცია? იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობა.
1.87. ვიპოვოთ საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}$ ოპერატორისა, რომლის საკუთარი ფუნქციაა $\Psi(x)$ შემდეგ შემთხვევებში:

ა) $\hat{A}=-\dfrac{d^2}{dx^2}$; $\Psi(x)=\sin 2x$.

ბ) $\hat{A}=-\dfrac{d^2}{dx^2}+x^2$; $\Psi(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1.88. ვიპოვოთ საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}$ ოპერატორისა, რომლის საკუთარი ფუნქციაა $\Psi(x)$ შემდეგ შემთხვევებში:

$$\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}; \;\; \Psi(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}$$

1.89. ვიპოვოთ საკუთარი მნიშვნელობები $\hat{A}$ ოპერატორისა, რომლის საკუთარი ფუნქციაა

$$\hat{A} = \hat{p}_x; \;\; \Psi(x,y,z,t) = e^{\frac{i}{\hbar}kx}\Phi(y,z,t).$$

1.90. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები ψ და საკუთარი მნიშვნელობები შემდეგი ოპერატორებისა

$$-\frac{d^2}{dx^2}, \text{ თუ } \psi = 0,\; x = 0 \text{ და } x = l\text{-თვის.}$$

1.91. იპოვეთ საერთო საკუთარი ფუნქციები შემდეგი ოპერატორებისა
ა) x და $\hat{p}_y$ ბ) $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ და $\hat{p}_z$ გ) p_x და p_x^2

1.92. ვაჩვენოთ, რომ $\Psi(\theta) = \cos\theta$ ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა $\hat{F} = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)$ ოპერატორის.

1.93. ვაჩვენოთ, რომ $\Psi(\xi) = \frac{\sin\xi}{\xi}$ ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა $\hat{F} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d}{d\xi}$ ოპერატორის.

1.94. ვაჩვენოთ, რომ $\Psi(\rho) = e^{-\rho/3}\rho^3$ ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა $\hat{F} = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{6}{\rho^2}$ ოპერატორის.

1.95. მოცემულია, რომ $\hat{L}\psi = \lambda\psi$. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L}^n\psi = \lambda^n\psi$, სადაც n მთელი რიცხვია.

1.96. მოცემულია, რომ $\hat{L}\psi = \lambda\psi$. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L}^{-1}\psi = \lambda^{-1}\psi$

1.97. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქცია და საკუთარი მნიშვნელობა კომპლექსურად შეუღლების ოპერატორისა

$$\hat{K}\psi(x) = \psi^*(x)$$

1.98. ვაჩვენოთ, რომ ერმიტული ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები ნამდვილი სიდიდეებია.

1.99. წრფივი $\hat{L}$ ოპერატორის ერთ საკუთარ λ მნიშვნელობას შეესაბამება n ტალღური ფუნქცია ანუ სრულდება შემდეგი ტოლობები

$$\hat{L}\Psi_1 = \lambda\Psi_1; \hat{L}\Psi_2 = \lambda\Psi_2; \ldots \hat{L}\Psi_n = \lambda\Psi_n$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ პირობებში $\Psi_1, \Psi_2, \ldots \Psi_n$ ფუნქციებიდან შეგვიძლია შევადგინოთ უსასრულო რაოდენობის კომბინაციები, რომლებიც იგი საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას აკმაყოფილებენ და რომელთაც იგივე λ საკუთარი მნიშვნელობა აქვთ.

1.100. ვიპოვოთ $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები. განიხილეთ ორი შემთხვევა: ა) მოძრაობა არ არის შეზღუდული ანუ $-\infty < x < \infty$ ბ) $0 \le x \le a$. ამ შემთხვევაში

დაადგინეთ რამდენჯერ ხდება ტალღური ფუნქცია ნული (კვანძების რიცხვი)

1.101. ერმიტული $\hat{f}$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

ა) $\hat{f}^2 = c^2$; ბ) $\hat{f}^2 = c\hat{f}$; გ). $\hat{f}^3 = c^2\hat{f}$

სადაც c ნამდვილი პარამეტრია. იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები ამ ოპერატორის.

1.102. ვიპოვოთ საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები შემდეგი ოპერატორისა $\hat{f} = \alpha\hat{p} + \beta\hat{x}$, სადაც $\hat{p}$ იმპულსის ოპერატორია,ხოლო $\hat{x}$ კოორდინატის.

მითითება: ამოხსენით საკუთარი მნიშვნელობების დიფერენციალური განტოლება.

1.103*. ერმიტულ $\hat{f}$ ოპერატორს აქვს N განსხვავებული საკუთარი მნიშვნელობა. აჩვენეთ, რომ $\hat{f}^N$ ოპერატორი წრფივად გამოისახება $\hat{1}, \hat{f}, \ldots f^{N-1}$ ოპერატორის საშუალებით.

მითითება: აჩვენეთ, რომ $G = (\hat{f} - f_1)(\hat{f} - f_2)\ldots(\hat{f} - f_N)$ ოპერატორის მოქმედება ნებისმიერ Ψ ფუნქციაზე იძლევა ნულს ანუ $G\Psi = 0$, რის დასამტკიცებლადაც Ψ ფუნქცია გაშალეთ $\hat{f}$ ოპერატორის საკუთარ φ_{f_k} ფუნქციებად $\Psi = \sum_{k=1}^{N} \varphi_{f_k}$.

1.104*. $\hat{A}, \hat{B}, \hat{L}$ ოპერატორები აკმაყოფილებენ შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს: $\left[\hat{A}, \hat{L}\right] = 0, \left[\hat{B}, \hat{L}\right] = 0, \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \neq 0$. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{L}$ ოპერატორის მნიშვნელობებს შორის აუცილებლად იქნება გადაგვარებული მნიშვნელობანი.

1.105*. ψ_A მდგომარეობაში სისტემას გააჩნია განსაზღვრული მნიშვნელობა A სიდიდის. აქვს თუ არა ამ მდგომარეობაში განსაზღვრული მნიშვნელობა B სიდიდეს, თუ ცნობილია, რომ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორები ა) არ კომუტირებენ ; ბ)კომუტირებენ

1.106. მდგომარეობაში, რომელიც აღიწერება Ψ_{ab} ტალღური ფუნქციით, A და B ფიზიკურ სიდიდეებს გააჩნიათ გარკვეული მნიშვნელობები. რა შეიძლება ითქვას ამ სიდიდეების საკუთარ a და b მნიშვნელობებზე, თუ ცნობილია, რომ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპეატორები ანტიკომუტირებენ ერთმანეთთან.

1.107. დავამტკიცოთ, რომ ერმიტული ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები ორთონორმირებულია

1.108. დავამტკიცოთ, რომ ორთოგონალური ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან.

მითითება: დაწერეთ წრფივად დამოკიდებულობის ტოლობა და ორთოგონალობის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ყველა კოეფიციენტი ამ ტოლობაში ნულია.

1.109. იპოვეთ შემდეგი არაერმიტული ოპერატორის $\hat{f} = x - \frac{d}{dx}$ საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. რა განსხვავებაა ერმიტული ოპერატორების შემთხვევისაგან?

1.110. იპოვეთ შემდეგი არაერმიტული ოპერატორის $\hat{f} = x + \frac{d}{dx}$ საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. რა განსხვავებაა ერმიტული ოპერატორების შემთხვევისაგან?

1.111*. ϕ_1 და ϕ_2 ნორმირებული ფუნქციებია, რომელთაც ერთი და იგივე საკუთარი მნიშვნელობა შეესაბამება. ცნობილია, რომ

$$\int \phi_1^* \phi_2 dx = d$$

სადაც d ნამდვილი რიცხვია. ვიპოვოთ ϕ_1 და ϕ_2 ფუნქციების ნორმირებული წრფივი კომბინაცია, რომელიც ორთოგონალური იქნება ა) ϕ_1-ის ბ) $\phi_1 + \phi_2$-ის.

1.112. ნაწილაკი მოძრაობს $x \in (0, b)$ ინტერვალში და მისი ტალღური ფუნქციაა $\Psi(x) = ax(b - x)$; ვიპოვოთ ნაწილაკის კოორდინატისა და კინეტიკური ენერგიის საშუალო.

1.113.გამოთვალეთ ნაწილაკის იმპულსის საშუალო $\langle p_x \rangle$ თუ მისი ტალღური ფუნქციაა ა) e^{ikx}; ბ) $\cos kx$; გ) e^{-ax^2}. ყველა შემთხვევაში $x \in (-\infty, \infty)$.

1.114. დავამტკიცოთ, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში იმპულსის საშუალოსათვის სამართლიანია ფორმულა

$$\langle p_x \rangle = \frac{i\hbar}{2} \int \left(\psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) dx$$

1.115*. დავამტკიცოთ, რომ დისკრეტული სპექტრის სტაციონალურ მდგომარეობებში ნაწილაკის იმპულსის პროექციის საშუალო მნიშვნელობა ნულია

მითითება: გამოიყენეთ 1.43 ამოცანაში დამტკიცებული $\left[\hat{H}, x\right] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$ თანაფარდობა.

1.116. დროის გარკვეულ მომენტში ნაწილაკი იმყოფება მდგომარეობაში

$$\psi(x) = A e^{ikx - \frac{x^2}{a^2}}$$

სადაც A და a მუდმივებია. ვიპოვოთ $\langle x \rangle$ და $\langle p_x \rangle$.

1.117*.სისტემა იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღიწერება ნორმირებული $\psi(x)$ ტალღური ფუნქციით და ის შეიძლება გაიშალოს ერმიტული $\hat{A}$ ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებად ანუ $\psi(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x)$.

ჩათვალეთ, რომ $\varphi_k(x)$ ფუნქციები ნორმირებულია ერთიანზე.

ა) მიიღეთ გამოსახულება, რომელიც განსაზღრავს c_k კოეფიციენტებს.

ბ) აჩვენეთ, რომ საშუალო მნიშვნელობა ტოლია

$$\langle A \rangle = \sum_k A_k |c_k|^2$$

სადაც A_k საკუთარი მნიშვნელობებია $\hat{A}$ ოპერატორის. რა ფიზიკური აზრი აქვს $|c_k|^2$-ს.

1.118*. ნაწილაკის ტალღურ ფუნქცია გაუსის განაწილებას ემთხვევა

$$\psi(x) = Ae^{-\lambda(x-a)^2}$$

სადაც A, a და λ დადებითი ნამდვილი მუდმივებია. ნორმირების პირობიდან იპოვეთ A. ასევე იპოვეთ $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ და σ_x

მითითება. ამ და ქვემოთ მოყვანილ რამდენიმე ამოცანაში ისარგებლეთ ცხრილის ინტეგრალებით, რომლებიც მოცემულია კრებულის დამატებაში **A.**

1.119. წყალბადის ატომის ძირითადი მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციაა $\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}}$, სადაც a_0 პირველი ბორის რადიუსია $\left(a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}\right)$, m ელექტრონის მასაა, e ელექტრონის მუხტი, A ნორმირების მუდმივა. ელექტრონის ბირთვთან ურთიერთქმედების პოტენციური ენერგიაა $U(r) = -\dfrac{e^2}{r}$. განსაზღვრეთ A და პოტენციური ენერგიის საშუალო $\langle U \rangle$.

1.120. მოცემულია ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$, სადაც A, λ, და ω-დადებითი ნამდვილი მუდმივებია. იპოვეთ A, $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ და ნაწილაკის პოვნის ალბათობა $(-\sigma_x, \sigma_x)$ ინტერვალში. გაითვალისწინეთ ინტეგრალქვეშა ფუნციის ლუწობა.

1.121. m მასის ნაწილაკი ასრულებს ერთგანზომილებიან მოძრაობას $(0,l)$ ინტერვალში. მისი ტალღური ფუნქციაა $\Psi(x) = A\sin\dfrac{\pi x}{l}$. იპოვეთ A, $\langle x \rangle$, $\langle p_x \rangle$ და $\langle E_k \rangle$.

1.122. m მასის ნაწილაკი ასრულებს ერთგანზომილებიან მოძრაობას და $t = 0$ მომენტში მისი ტალღური ფუნქციაა $\Psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{a^2}+ikx}$, სადაც A, k და a მუდმივებია. იპოვეთ A, $\langle x \rangle$, $\langle p_x \rangle$ და $\langle E_k \rangle$. გაითვალისწინეთ ინტეგრალქვეშა ფუნციის ლუწობა.

1.123. მოცემულია ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია $\Psi(x) = C\varphi(x)\exp\dfrac{ip_0 x}{\hbar}$, სადაც $\varphi(x)$ ნამდვილი ფუნქციაა. ვაჩვენოთ, რომ p_0 ნაწილაკის საშუალო იმპულსია მოცემულ მდგომარეობაში.

1.124. ნაწილაკის მდგომარეობა აღიწერება ტალღური ფუნქციით $\Psi(x) = C\varphi(x)\exp\left\{\dfrac{ip_0 x}{\hbar} - \dfrac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}$, სადაც p_0, x_0, a ნამდვილი პარამეტრებია. იპოვეთ $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, σ_x, $\langle p \rangle$, $\langle p^2 \rangle$, σ_p

1.125. $t = 0$ მომენტში ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(x,0)=\begin{cases} A\dfrac{x}{a}; \ \ 0\le x\le a; \\ A\dfrac{b-x}{b-a}; \ a\le x\le b; \\ 0; \ x<0, x>b \end{cases}$$

სადაც A,a,b მუდმივებია.

ა) ანორმირეთ ტალღური ფუნქცია Ψ ანუ A გამოსახეთ a და b-ს საშუალებით.

ბ) სად არის მოსალოდნელი ნაწილაკის პოვნა ყველაზე დიდი ალბათობით $t=0$ მომენტში.

გ) იპოვეთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობა a წერტილის მარცხნივ. რას უდრის ეს ალბათობა, როცა $b=a$ და $b=2a$?

დ) იპოვეთ $\langle x\rangle$.

1.126. ვაჩვენოთ, რომ საშუალო მნიშვნელობები ერმიტული ოპრატორებისა $\hat{L}\hat{L}^{+}$ და $\hat{L}^{+}\hat{L}$ ($\hat{L}$ წრფივი ოპერატორია) ნებისმიერ მდგომარეობაში არაუარყოფითია.

1.127. ვიპოვოთ კავშირი ნაწილაკის კოორდინატისა და იმპულსის საშუალოებს შორის ორ მდგომარობას შორის, რომელთა ტალღურ Ψ_1 და Ψ_2 ფუნქციებს შორის შემდეგი კავშირია:

ა) $\Psi_2(x)=\Psi_1(x+a)$; ბ) $\Psi_2(x)=\Psi_1(x)\exp\dfrac{ip_0x}{\hbar}$

1.128*. ერმიტულ $\hat{f}(\lambda)$ ოპერატორს გააჩნია დისკრეტული სპექტრი და დამოკიდებულია λ პარამეტრზე. დავამტკიცოთ, რომ სრულდება შემდეგი თანაფარდობა

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial\lambda}=\left\langle\frac{\partial f(\lambda)}{\partial\lambda}\right\rangle$$

სადაც n ინდექსით დანომრილია საკუთარი მნიშვნელობები და ტოლობის მარჯვენა მხარეს გასაშუალოება ხდება $\Psi_n(\lambda;q)$ ტალღური ფუნქციით.

მითითება: საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება $\hat{f}(\lambda)\Psi_n(\lambda;q)=f_n(\lambda)\Psi_n(\lambda;q)$ გააწარმოეთ λ პარამეტრით და გამოიყენეთ $\hat{f}(\lambda)$ ოპერატორის ერმიტულობა.

1.129. f ფიზიკური სიდიდის $\hat{P}(f_i)$ პროექციული ოპერატორი ეწოდება წრფივ ოპერატორს, რომლის მოქმედება Ψ_{f_k} ფუნქციაზე შემდეგნაირად განიმარტება

$$\hat{P}(f_i)\Psi_{f_k}=\delta_{f_i,f_k}\Psi_{f_i}=\begin{cases}\Psi_{f_i}; \ f_i=f_k \\ 0; \ \ f_i\ne f_k\end{cases}$$

აჩვენეთ, რომ $\hat{P}(f_i)$ ოპერატორს შემდეგი თვისებები აქვს

ა) ერმიტული ოპერატორია ბ) $\hat{P}^2(f_i)=\hat{P}(f_i)$

მითითება: გამოიყენეთ სისრულის პირობა ანუ ნებისმიერი ფუნქცია გაშალეთ Ψ_{f_k} ფუნქციებად და ჯამზე იმოქმედეთ $\hat{P}(f_i)$ ოპერატორით.

1.130. რა ფიზიკური აზრი აქვს $\hat{P}(f_i)$ პროექციული ოპერატორის საშუალოს $\left\langle \hat{P}(f_i)\right\rangle$ ნებისმიერი Ψ ტალღური ფუნქციით აღწერილ მდგომარეობაში?

მითითება: გამოიყენეთ სისრულის პირობა, საშუალოს განმარტების ფორმულა და Ψ_{f_k} ფუნქციების ორთონორმირების პირობა.

1.131. ვიპოვოთ პროექციული ოპერატორი $\hat{P}_{\pm}$, რომელიც კოორდინატების ინვერსიის მიმართ აპროექტირებს ლუწ P_+ და P_- კენტ მდგომარეობებში. აჩვენეთ, რომ ა) $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$; ბ) $P_+ + P_- = 1$.

1.132. ვაჩვენოთ, რომ უნიტარული ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები მოდულით ერთის ტოლია.

1.133. უნიტარული ოპერატორი აკმაყოფილებს პირობას $\hat{U}^2 = \hat{U}$. იპოვეთ ცხადი სახე ამ ოპერატორის.

1.134. მოცემულია $\hat{U}$ უნიტარული ოპერატორი. რა შემთხვევაში იქნება უნიტარული შემდეგი ოპერატორი $\hat{A} = c\hat{U}$, სადაც c რიცხვია.

1.135. ვაჩვენოთ, რომ ორი უნიტარული ოპერატორის ნამრავლი უნიტარული ოპერატორია.

1.136. შეიძლება თუ არა უნიტარული ოპერატორი ერმიტულიც იყოს?

1.137. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{U} = \exp\left(i\hat{F}\right)$ ოპერატორი (სადაც $\hat{F}$ ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია) უნიტარული ოპერატორია.

მითითება: გაშალეთ ექსპონენტი მწკრივად და გამოიყენეთ $\hat{F}$ ოპერატორის ერმიტულობა.

1.138*. აჩვენეთ, რომ თუ $\hat{A}$ და $\hat{B}$ ერმიტული ოპერატორები კომუტირებენ, მაშინ $\hat{U} = \dfrac{\hat{A} + i\hat{B}}{\hat{A} - i\hat{B}}$ ოპერატორი უნიტარული ოპერატორია. წარმოადგინეთ ამ სახით 1.137 ამოცანის $\hat{U} = \exp\left(i\hat{F}\right)$ უნიტარული ოპერატორი.

მითითება: წინასწარ დაამტკიცეთ დამხმარე თანაფარდობა $\left(\hat{L}^{-1}\right)^+ = \left(\hat{L}^+\right)^{-1}$

1.139*. აჩვენეთ, რომ ოპერატორის უნიტარული გარდაქმნებისას $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^+$ შემდეგი ტიპის ალგებრული თანაფარდობები ოპერატორებს შორის

$$\hat{F}\left(\hat{A}_i\right) = c_0 + \sum_i c_i \hat{A}_i + \sum_{i,k} c_{i,k} \hat{A}_i \hat{A}_k + \ldots = 0$$

ინარჩუნებს სახეს ანუ $\hat{F}\left(\hat{A}_i'\right) = 0$

მითითება: განიხილეთ უნიტარული გარდაქმნა $\hat{F}' = \hat{U}\hat{F}\hat{U}^+$ და ჯამის ყველა წევრის მამრავლებში ჩასვით $\hat{U}^+\hat{U} = 1$.

თავი 2 ერთგანზომილებიანი მოძრაობა

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

შრედინგერის სტაციონალური განტოლება

$$\hat{H}\psi \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+U(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \tag{2.1}$$

სათანადო სასაზღვრო პირობებით (ტალღური ფუნქციის და მისი პირველი წარმოებულის უწყვეტობა, სასრულობა მთელ სივრცეში, ცალსახობა) განსაზღვრავს $U(x)$ პოტენციალურ ველში ნაწილაკის ენერგეტიკულ სპექტრს და სტაციონალურ მდგომარეობების ტალღურ ფუნქციებს.

dw ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკი აღმოვაჩინოთ x-დან $x+dx$-მდე ინტერვალში გამოისახება ფორმულით

$$dw=|\psi|^2\,dx \tag{2.2}$$

w ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკი აღმოჩნდება x_1-დან x_2-მდე ინტერვალში, შეიძლება ვიპოვოთ მითითებულ ინტერვალში ინტეგრებით

$$w=\int_{x_1}^{x_2}|\psi(x)|^2\,dx \tag{2.3}$$

ენერგიის სპექტრი E_n არეში

$$U(x)<E_n<U(\pm\infty) \tag{2.4}$$

დისკრეტულია. შევნიშნოთ, რომ (2.4) არეში კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკს შეუძლია მხოლოდ ფინიტური მოძრაობა. ეს E_n დონეები გადაუგვარებელია, ხოლო შესაბამისი საკუთარი ψ_n ფუნქციები კვადრატულად ინტეგრებადია.

$$E_n>\min U(\pm\infty) \tag{2.5}$$

არეში ენერგიის სპექტრი უწყვეტია.

$$E_n>\max U(\pm\infty) \tag{2.6}$$

არეში ენერგეტიკული სპექტრი ორჯერადად გადაგვარებულია. (2.6) არეში კლასიკურ მექანიკაში შესაძლოა ინფინიტური მოძრაობა ორივე მიმართულებით $x\to\pm\infty$.

როდესაც ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა პოტენციალურ ჯებირს ტალღური ფუნქციას შემდეგი ასიმპტოტკა გააჩნია

$$\psi^+(x)\approx\begin{cases} e^{ik_1x}+A(E)e^{-ik_1x}, & x\to-\infty \\ B(E)e^{ik_2x}, & x\to\infty \end{cases} \tag{2.7}$$

სადაც $k_{1,2}=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U(\pm\infty))}$. $A(E)$ და $B(E)$ ამპლიტუდები განსაზღვრავენ გაჟონვის

$$D(E)=\frac{k_2}{k_1}|B|^2 \tag{2.8}$$

და არეკვლის

$$R(E)=|A|^2 \tag{2.9}$$

კოეფიციენტებს.

2.1. დისკრეტული სპექტრი. სტაციონალური მდგომარეობები.

2.1. აჩვენეთ, რომ თუ სისტემის ჰამილტონიანი ლუწია $\hat{H}(x)=\hat{H}(-x))$, მაშინ სისტემის ტალღურ ფუნქციებს გააჩნიათ გარკვეული ლუწობა, ანუ ან ლუწი ან კენტი ფუნქციები არიან.
2.2. m მასის ნაწილაკი ასრულებს ერთგანზომილებიან თავისფალ მოძრაობას. იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ენერგია და ტალღური ფუნქცია.
2.3. აჩვენეთ, რომ თუ პოტენციალური ენერგია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით $V(x_1,x_2,x_3)=V_1(x_1)+V_2(x_2)+V_3(x_3)$, მაშინ დროზე დამოუკიდებელი შრედინგერის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს 3 ერთგანზომილებიანი განტოლების სახით

$$\frac{d^2\psi_i(x_i)}{dx_i^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E_i-V_i(x_i)\right]\psi_i(x_i)=0,\ \ i=1,2,3,....$$

სადაც $\psi(x_1,x_2,x_3)=\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)$ და $E=E_1+E_2+E_3$
2.4. დროზე დამოუკიდებელი ტალღური ფუნქცია ანუ შრედინგერის განტოლების

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-V(x)\right]\psi(x)=0$$

ამონახსნი შეესაბამება ბმულ ან არაბმულ მდგომარეობებს. დაუშვით, რომ ზღვარი $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=V_\pm$ არსებობს და $V_+<V_-$. ამ პირობებში როდის გვაქვს ბმული მდგომარეობები შემდეგ შემთხვევებში: ა) თუ $E>V_-$; ბ) თუ $V_->E>V_+$; გ) თუ $E<V_+$. რა ხდება თუ $V_+=V=V_0$?
2.5*. აჩვენეთ, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები გადაუგვარებელია.
მითითება: დავუშვით საწინააღმდეგო ანუ ერთ დონეს 2 დამოუკიდებელი ფუნქცია შეესაბამება, დაწრეთ მათთვის ორჯერ შრედინგერის ერთგანზომილებიანი სტაციონალური განტოლება და აჩვენეთ, რომ მიიღებთ წინააღმდეგობას ანუ ეს ორი ფუნქცია ერთმანეთზე დამოკიდებული გამოვა.
2.6. m მასის ნაწილაკი მოძრაობს $V(x)$ პოტენციალურ ველში. გარკვეულ არეში ველი მუდმივია $V(x)=V_0$. ამ არისათვის იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობის ტალღური ფუნქციები, თუ ა) $E>V_0$; ბ) $E<V_0$; გ) $E=V_0$, სადაც E არის ნაწილაკის ენერგია.
2.7. ვიპოვოთ ენერგეტიკული დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები m მასის ნაწილაკის სტაციონალური მდგომარეობებისა უსასრულოდ სიმაღლის a სიგანის პოტენციალურ ორმოში

$$U(x) = \begin{cases} 0, \ 0 < x < a \\ \infty, x < 0, \ x > a \end{cases}$$

გამოარკვიეთ მიღებული ტალღური ფუნქციების სიმეტრიის თვისებები კოორდინატების ინვერსიისას ორმოს ცენტრის მიმართ ანუ $x' = -x + a$ გარდაქმნისას.

2.8. აჩვენეთ, რომ 2.7 ამოცანის ტალღური ფუნქციები ორთოგონალურია

2.9. ვიპოვოთ $\langle x \rangle$, $\left\langle x^2 \right\rangle$, σ_x, $\langle p \rangle$, $\left\langle p^2 \right\rangle$, σ_p 2.7 ამოცანის შემთხვევაში.

2.10. ვიპოვოთ 2.7 ამოცანაში ნაწილაკის E ენერგია, თუ ცნობილია ორმოს საზღვარზე $(x = 0)$ ტალღური ფუნქციის წარმოებულის $\dfrac{d\psi}{dx}$ მნიშვნელობა ანუ $\psi'(0)$.

2.11*. აჩვენეთ, რომ 2.7 ამოცანაში არ შეიძლება არსებობდეს $E = 0$ და $E < 0$ მდგომარეობები.

მითითება: აჩვენეთ, რომ შრედინგერის განტოლებაში $E = 0$ და $E < 0$ მდგომარებებისთვის $\psi(0) = \psi(a) = 0$ პირობა მიგვიყვანს იქამდე, რომ $\psi \equiv 0$ მთელ $0 \le x \le a$ არეში.

2.12. ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში.იპოვეთ ნაწილაკის მასა, თუ ორმოს სიგანეა a და ენერგიის სხვაობა 3-ე და 2-ე ენერგეტიკულ დონეებს შორის არის ΔE .

2.13. ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ a სიგანის ორმოში. ვიპოვოთ რიცხვი dN ენერგეტიკული დონეებისა $(E, E + dE)$ ინტერვალში, თუ ენერგიები ძალიან მჭიდროდ არიან განლაგებული.

2.14. ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ a სიგანის ორმოში. ვიპოვოთ

ა) წნევის ძალა, რომელსაც ნაწილაკი აწარმოებს კედლებზე.

ბ) მუშაობა, რომელიც უნდა შევასრულოთ, რომ ორმო ნელა შევკუმშოთ η-ჯერ.

2.15. ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ a სიგანის ორმოში. ვიპოვოთ ნაწილაკის $\dfrac{a}{3} < x < \dfrac{2a}{3}$ არეში პოვნის ალბათობა.

2.16. m მასის ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში. ნაწილაკის ადგილმდებარეობის სიმკვრივის ალბათობის მაქსიმალური მნიშვნელობაა P_m. ვიპოვოთ ორმოს a სიგანე და მოცემულ მდგომარეობაში ნაწილაკის E ენერგია.

2.17*. m მასის ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან a სიგანის პოტენციალურ ორმოში. ორმოს გვერდებს მყისიერად და სიმეტრიულად აფართოებენ $2a$ სიგანემდე. როგორია იმის ალბათობა, რომ ამ გაფართოებულ ორმოში ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში?

მითითება: საწყისი ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია გაშალეთ გაფართოებული ორმოს ტალღურ ფუნქციებად.

2.18.ვაჩვენოთ, რომ შრედინგერის დროითი განტოლების სტაციონალური მდგომარეობები მიიღება მხოლოდ მაშინ, როცა პოტენციალი U არ არის დროზე დამოკიდებული.
2.19. როგორ შეიცვლება სტაციონალური მდგომარეობის აღმწერი სრული ტალღური ფუნქცია $\Psi(x,t)$, თუ შევცვლით პოტენციური ენერგიის ათვლის წერტილს გარკვეული ΔU სიდიდით.
2.20.ვიპოვოთ შრედინგერის დროითი განტოლების ამონახსნი თავისუფალი ნაწილაკისთვის, რომელიც მოძრაობს P იმპულსით X ღერძის დადებითი მიმართულებით.
2.21. ვაჩვენოთ, რომ თავისუფლად მოძრავი ნაწილაკის ენერგიამ შეიძლება ნებისმიერი მნიშვნელობა მიიღოს.
2.22..K' ინერციული სისტემა $\vec{V}_0$ სიჩქარით მოძრაობს K ინერციული სისტემის მიმართ. ვიპოვოთ K სისტემაში არარელატივისტურად მოძრავი თავისუფალი m მასის ნაწილაკის $\Psi(x,t)$ ტალღური ფუნქციის კავშირი მის ტალღურ ფუნქციასთან $\Psi'(x',t)$ K' სისტემაში. სიმარტივისათვის ჩათვალეთ, რომ ნაწილაკის სიჩქარე K' სისტემაში მიმართულებით ემთხვევა $\vec{V}_0$-ს.
2.23. გამოარკვიეთ არის თუ არა $\Psi(x,t)=\sum\psi_k(x)e^{i\omega_k t}$ ტალღური ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს სტაციონალური მდგომარეობების სუპერპოზიციას, შრედინგერის დროითი და სტაციონალური განტოლებების ამონახსნი.
2.24.ნაწილაკის ყოფაქცევა ერთგანზომილებიან ორმოში $x\subset(0,a)$ აღიწერება საწყისი ტალღური ფუნქციით $\Psi(x,0)=Ax(a-x)$, სადაც A მუდმივაა. იპოვეთ A, $\langle x\rangle,\langle p\rangle,\langle H\rangle$ $t=0$ მომენტში.
2.25*. ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ a სიგანის ორმოში. იპოვეთ $\langle x\rangle$ მდგომარეობაში, რომელიც წარმოადგენს ორი უმდაბლესი მდგომარეობის სუპერპოზიციას თანაბარი წონებით.

მითითება: გვაქვს $\Psi_1=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}e^{-\frac{i\pi^2\hbar}{2a^2m}t}$; $\Psi_2=\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}e^{-\frac{i2^2\pi^2\hbar}{2a^2m}t}$ და

$$\langle x\rangle=\frac{1}{2}\left\{\int_0^a\Psi_1^*\hat{x}\Psi_1dx+\int_0^a\Psi_2^*\hat{x}\Psi_2dx+\int_0^a\Psi_1^*\hat{x}\Psi_2dx+\int_0^a\Psi_2^*\hat{x}\Psi_1dx\right\}.$$

დათვალეთ თითოეული ინტეგრალი
2.26*. ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები სწორკუთხა პოტენციალურ ორმოში

$$V(x)=-V_0;\quad |x|<a$$
$$V(x)=0;\quad |x|\ge a$$

მითითება: დაწერეთ შრედინგერის განტოლება სათანადო არეებში და მოახდინეთ ტალღური ფუნქციის ”შეკერვა” $x=-a$ და $x=a$ წერტილებში.
2.27.m მასის ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან სიმეტრიულ ორმოში

$$V(x)=0;\quad |x|<a$$
$$V(x)=V_0;\qquad |x|\ge a$$

მიიყვანეთ ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება $E<U_0$ არეში შემდეგ სახემდე

$$ka=n\pi-2\arcsin\frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}}$$

სადაც $k=\dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ და n მთელი რიცხვია.

2.28.ისარგებლეთ წინა 2.27 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ a^2U_0 სიდიდის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც

ა) ძირითადი მდგომარეობის ენერგიაა $E=\dfrac{U_0}{2}$;

ბ) ჩნდება მეორე დონე, n-ე დონე. რამდენ დონეს შეიცავს მოცემული ორმო, თუ $a^2U_0=\dfrac{75\hbar^2}{m}$?

2.29..m მასის ნაწილაკი იმყოფება 2.27 ამოცანის ორმოში. იპოვეთ ძირითადი მდგომარეობის E_1 ენერგია, თუ ტალღური ψ ფუნქციის მნიშვნელობა ორმოს კიდეებზე ორჯერ მცირეა ვიდრე ორმოს შუაში.

2.30.m მასის ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან $U(x)$ პოტენციალურ ველში სტაციონალურ მდგომარეობაში, რომლის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს $\psi(x)=Ae^{-\alpha x^2}$, სადაც A და α მოცემული მუდმივებია $(\alpha>0)$. გაითვალისწინეთ, რომ $U(0)=0$ და იპოვეთ $U(x)$ და ნაწილაკის E ენერგია.

2.31.m მასის ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან $U(x)$ პოტენციალურ ველში სტაციონალურ მდგომარეობაში, რომლის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს $\psi(x)=Axe^{-\alpha x}$ თუ $x>0$, $\psi(x)=0$ თუ $x<0$ და $U(x)\to 0$, თუ $x\to\infty$. იპოვეთ $U(x)$ და ნაწილაკის E ენერგია.

2.32. ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები სწორკუთხა პოტენციალურ ორმოში

$$V(x)=\infty;\quad x<0$$
$$V(x)=-V_0;\ 0<x<a$$
$$V(x)=0;\quad x>a$$

2.33*. ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები ასიმეტრიულ პოტენციალურ ორმოში

$$V(x)=V_2;\quad x<0$$
$$V(x)=0;\ 0<x<a;\quad V_2>V_1>0$$
$$V(x)=V_1;\quad x>a$$

2.34*. ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები ასიმეტრიულ პოტენციალურ ორმოში

$$
\begin{aligned}
&V(x)=\infty; \quad x<0\\
&V(x)=V_1;\ 0<x<a\\
&V(x)=V_2; \quad a<x<b; \quad V_2>V_3>V_1>0\\
&V(x)=V_3;\ b<x<c\\
&V(x)=\infty;\ x>c
\end{aligned}
$$

2.35*. ვიპოვოთ ნორმალიზებული ტალღური ფუნქციები პოტენციალურ ორმოში

$$
\begin{aligned}
&V(x)=\infty; \quad x<0\\
&V(x)=V_1;\ 0<x<a\\
&V(x)=V_2; \quad a<x<b\\
&V(x)=\infty;\ x>b
\end{aligned}
\qquad V_2>V_1>0
$$

ვიპოვოთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობები $0<x<a$ და $a<x<b$ ინტერვალებში.

2.36. m მასის ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში

$$
U(x)=\begin{cases}\infty;\ x\le 0,\\ 0;\ 0<x<l,\\ U_0\ :x\ge l\end{cases}
$$

ვიპოვოთ

ა) ენერგიის განმსაზღვრელი განტოლება $E<U_0$ არეში. მივიყვანოთ ის შემდეგ სახეზე

$$
\sin kl=\pm kl\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ml^2U_0}}; \quad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}
$$

ბ) მინიმალური მნიშვნელობა l^2U_0 სიდიდისა, რომლის დროსაც ჩნდება პირველი და n-ე დონე. რამდენ დონეს შეიცავს ორმო, რომლისთვისაც $l^2U_0=\dfrac{75\hbar^2}{m}$

2.37. წინა 2.36 ამოცანაში ერთადერთი დონის ენერგიაა $E=\dfrac{U_0}{2}$.

ამ ამოცანის ამოხსნების გამოყენებით, განსაზღვრეთ:

ა) l^2U_0 სიდიდის მნიშვნელობა ასეთი ორმოსათვის.

ბ) ნაწილაკის კოორდინატის ყველაზე უფრო ალბათური მნიშვნელობა.

გ) ნაწილაკის პოვნის ალბათობა $x>l$ არეში.

2.38. m მასის ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში

$$
U(x)=\begin{cases}\infty;\ x\le l,\\ 0;\ -l<x\le 0,\\ U_0;0<x<l\\ \infty;\ x\ge l\end{cases}
$$

აჩვენეთ, რომ $E>U_0$-ის დროს, განტოლებას რომელიც განსაზღვრავს ენერგიის მნიშვნელობებს შემდეგი სახე აქვს

$$k_2 tgk_1 l = -k_1 tgk_2 l$$

სადაც

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$$

2.39. განიხილეთ წინა 2.38 ამოცანაში $E < U_0$ შემთხვევა და
ა) აჩვენეთ, რომ განტოლებას რომელიც განსაზღვრავს ენერგიის მნიშვნელობებს შემდეგი სახე აქვს

$$\lambda tgkl = -kth\lambda l$$

სადაც

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}$$

და th არის ჰიპერბოლური ტანგესი.

ბ) იპოვეთ $l^2 U_0$ მნიშვნელობათა ინტერვალი, როდესაც $E < U_0$ არეში არ გვექნება არცერთი დონე; გვექნება მხოლოდ ერთი დონე.

2.40. აჩვენეთ, რომ დისკრეტული სპექტრის სტაციონალური მდგომარეობაში მყოფ ნაწილაკზე მოქმედი საშუალო ძალა ნულის ტოლია.

2.41*. პოტენციალურ ენერგიას აქვს სასრულო წყვეტა $x = x_0$ წერტილში. გამოირკვიეთ ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა ამ წერტილში.
მითითება: დაწერეთ შრედინგერის განტოლება ასეთი პოტენციალისათვის და აინტეგრეთ მიღებული განტოლება $x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$ არეში, შემდეგ კი $\varepsilon \to 0$ ზღვარი აიღეთ.

2.42. პოტენციალურ ენერგიას აქვს უსასრულო სიმაღლის ბარიერი $x = x_0$ წერტილში. გამოირკვიეთ ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა ამ წერტილში.

2.43*.პოტენციალს აქვს სახე $U(x) = \widehat{U}(x) + \alpha\delta(x - x_0)$, სადაც $\delta(x)$ დირაკის დელტა ფუნქციაა, ხოლო $\widehat{U}(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა. როგორ იქცევიან შრედინგერის განტოლების ამონახსნი $\psi(x)$ და მისი წარმოებული x_0 წერტილში?
მითითება: დაწერეთ შრედინგერის განტოლება $U(x) = \widehat{U}(x) + \alpha\delta(x - x_0)$ პოტენციალისათვის და აინტეგრეთ მიღებული განტოლება $x_0 - \varepsilon \le x \le x_0 + \varepsilon$ არეში, შემდეგ კი $\varepsilon \to 0$ ზღვარი აიღეთ.

2.44. ვიპოვოთ ენერგიის დონეები და ნორმირებადი ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს $U(x) = -\alpha\delta(x)$ ველში.

2.45. წინა 2.44 ამოცანაში ვიპოვოთ: ა) საშუალო მნიშვნელობა კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიისა მიღებული ერთადერთი მდგომარეობისათვის ბ) ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში.

2.46. ამოხსენით შრედინგერის დროზე დამოუკიდებელი განტოლება შემდეგი პოტენციალისათვის

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x); \ -a < x < a \\ \infty; \ |x| \ge a; \ \alpha > 0 \end{cases}$$

ცალ-ცალკე განიხილეთ ლუწი და კენტი მდგომარეობები.

2.47. განიხილეთ პოტენციალი

$$V(x)=\begin{cases}\infty; \ x<0\\ \alpha\delta(x-a); \ x\geq 0\end{cases}$$

სადაც a და α დადებითი ნადვილი რიცხვებია.
ა) ამოხსენით შრედინგერის განტოლება ამ პოტენციალისათვის
ბ) ენერგია გამოდის კომპლექსური. გაარკვიეთ, ხომ არ ეწინააღმდეგება ეს ფაქტი იმას,რომ ნორმირებული სტაციონალური მდგომარეობებისათვის E ნამდვილი სიდიდეა.

2.48. ვიპოვოთ ნაწილაკის ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქცია, რომელიც იმყოფება ერთგანზომილებიან კულონურ ველში $V(x)=-\dfrac{e^2}{|x|}$

2.49. იპოვეთ ჰარმონიული ოსცილატორის, რომლის ჰამილტონიანია

$$H=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{m\omega^2}{2}x^2$$

ენერგიის სპექტრი და ტალღური ფუნქციები.

2.50. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგი პოტენციალური ენერგიის ველში

$$V(x)=\begin{cases}\infty; \ x\leq 0;\\ \dfrac{m\omega^2}{2}x^2; x>0\end{cases}$$

იპოვეთ ენერგიის სპექტრი.

2.51. ჰარმონიული ოსცილატორისათვის იპოვეთ იმპულსების სხვადასხვა მნიშვნელობების განაწილების ალბათობა.

2.52.ვიპოვოთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორისა, რომელიც მოთავსებულია მუდმივ ელექტრულ $\vec{E}$ ველში.ნაწილაკის მუხტია e

2.53*. დათვალეთ ა) $\langle x\rangle, \langle x^2\rangle, \langle p\rangle, \langle p^2\rangle$ ჰარმონიული ოსცილატორის ψ_0 და ψ_1 მდგომარეობებში. ბ) შეამოწმეთ ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის თანაფარდობა ამ მდგომარეობებისათვის. გ) დათვალეთ საშუალო კინეტიკური $\langle T\rangle$ და პოტენციალური $\langle V\rangle$ ენერგიები ამ მდგომარეობებში.

მითითება: გამოთვლების გამარტივების მიზნით ისარგებლეთ $\xi=\sqrt{\dfrac{m\omega}{\hbar}}x$ ცვლადით და $\alpha=\left(\dfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$ მუდმივათი.

2.54.ერთგანზომილებიანი ოსცილატორი იმყოფება n-ე დონეზე. იპოვეთ მისთვის $\langle x^2\rangle$ და საშუალო პოტენციალური ენერგია.

2.55. ჰარმონიული ოსცილატორის ენერგიაა $\dfrac{7}{2}\hbar\omega$. გამოთვალეთ საშუალო კინეტიკური ენერგია.

2.56. გამოსახეთ ჰარმონიული ოსცილატორის ჰამილტონიანი $\hat{a}^+$ გაჩენის და $\hat{a}$ გაქრობის ოპერატორების საშუალებით. ეს ოპერატორები ასე განიმარტება:$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right)$; $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right)$,სადაც $\xi = \frac{x}{x_0}$; $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

2.57. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$\hat{a}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1};\ \hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$

2.58. $\hat{a}^+$ გაჩენის და $\hat{a}$ გაქრობის ოპერატორების საშუალებით იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები ჰარმონიული ოსცილატორისათვის.

2.59. $\hat{a}^+$ გაჩენის და $\hat{a}$ გაქრობის ოპერატორების საშუალებით იპოვეთ ტალღური ფუნქციები ჰარმონიული ოსცილატორისათვის.

2.60. დაამტკიცეთ, რომ კოორდინატის ოპერატორისათვის ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ შემდეგი ინტეგრალები

$$\langle\psi_{n+1}|x|\psi_n\rangle = x_0\sqrt{\frac{n+1}{2}};\ \langle\psi_{n-1}|x|\psi_n\rangle = x_0\sqrt{\frac{n}{2}}$$

2.61. აჩვენეთ, რომ კომუტატორი $\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] = 1$

2.62. აჩვენეთ, რომ თუ ψ ფუნქცია აღწერს მდგომარეობას E ენერგიით ანუ $\hat{H}\psi = E\psi$,მაშინ $a_+\psi$ აღწერს მდგომარეობას $E + \hbar\omega$ ენერგიით ანუ $\hat{H}(a^+\psi) = (E + \hbar\omega)(a^+\psi)$.

2.63. აჩვენეთ, რომ გაქრობის ოპერატორი $\hat{a}$ სისტემის ენერგიას ქვევით წევს $\hbar\omega$ სიდიდით.

2.64*.აჩვენეთ, რომ გაქრობის ოპერატორს არ შეუძლია შექმნას მდგომარეობა უსასრულო ნორმით ანუ $\int|\hat{a}\psi|^2 < \infty$ თუ თავად ψ ნორმალიზირებული მდგომარეობაა შრედინგერის განტოლების.

მითითება: გამოიყენეთ ნაწილობითი ინტეგრაცია და აჩვენეთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\hat{a}\psi)^*(\hat{a}\psi)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(\hat{a}_+\hat{a}\psi)dx$$

შემდეგ გამოიყენეთ შრედინგერის განტოლება ჩაწერილი $\hat{a}^+$ გაჩენის და $\hat{a}$ გაქრობის ოპერატორების საშუალებით

$$\left(\hat{a}_+\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi = E\psi$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ თანაფარდობა

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{a}\psi|^2 dx = E - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

სადაც E არის ψ მდგომარეობის ენერგია.

2.65. ა) ერმიტის პოლინომი განიმარტება შემდეგნაირად

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\left(\frac{d}{d\xi}\right)^n e^{-\xi^2}$$

გამოიყენეთ ეს ფორმულა H_3 და H_4-ის დასათვლელად.

ბ) ერმიტის პოლინომები აკმაყოფილებენ რეკურენტულ თანაფარდობას

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi)$$

გამოიყენეთ ეს ფორმულა და ა) კითხვაზე პასუხი H_5 და H_6-ის დასათვლელად.

2.66. ა) ერმიტის პოლინომებისათვის ადგილი აქვს გაწარმოების ფორმულას

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi)$$

გამოიყენეთ ეს ფორმულა H_5 და H_6-ის გასაწარმოებლად.

ბ) ცნობილია, რომ ერმიტის პოლინომი $H_n(\xi)$ არის n-ე რიგის წარმოებული $z=0$ წერტილში $e^{-z^2+2z\xi}$ მაწარმოებელი ფუნქციისა. გამოიყენეთ ეს ფაქტი და იპოვეთ H_0, H_1 და H_2-ის დასათვლელად.

2.67*. ორი ნაწილაკს, რომლებიც ერთმანეთთან დრეკადი $F = k(x_1 - x_2)$ ძალით არიან დაკავშირებული, შეუძლიათ თავისუფლად გადაადგილება OX ღერძის გასწვრივ. ვიპოვოთ ტალღური ფუნქცია და ენერგიის სპექტრი.

მითითება:შემოიტანეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდატი X_c და ფარდობითი $x = x_1 - x_2$ კოორდინატი და განაცალეთ ცვლადები.

2.68*გამოთვალეთ მატრიცული ელემენტები x და p ოპერატორებისა ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის

$$x_{nk} = \langle n|x|k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) x \Phi_k(x) dx$$

$$p_{nk} = \langle n|p|k\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) p \Phi_k(x) dx$$

სადაც $\Phi_n(x)$ ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორის ტალღური ფუნქციებია.

მითითება: ჩაწერეთ x და $\hat{p}$ ოპერატორები $\hat{a}^+$ გაჩენისა და $\hat{a}$ გაქრობის ოპერატორების საშუალებით და გამოიყენეთ 2.57 ამოცანის შედეგები.

2.69*. იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, ე.წ. მორსის პოტენციალისათვის

$$V(x) = A\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right)$$

სადაც A და α დადებითი მუდმივებია. გამოარკვიეთ როდის არ გვაქვს დონეები.

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $\xi = \frac{2\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} e^{-\alpha x}$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.70*. იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, შემდეგი პოტენციალისათვის

$$V(x) = -\frac{U_0}{ch^2 \alpha x}$$

სადაც $U_0 > 0$

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $\xi = th\alpha x$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.71*.იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა პაშენ-ტალერის პოტენციალისათვის

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2 \alpha x}; \; V_0 > 0, \alpha > 0$$

მითითება: ჩაწერეთ $V_0 = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \lambda(\lambda - 1), \lambda > 1$, ხოლო შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $y = \sin^2 \alpha x$, გააკეთეთ $\psi = (1-y)^{\frac{\lambda}{2}} f(y)$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.72*. იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა განზოგადებული პაშენ-ტალერის პოტენციალისათვის

$$V(x) = \frac{V_1}{\sin^2 \alpha x} + \frac{V_2}{\cos^2 \alpha x};$$

$0 < x < \frac{\pi}{2\alpha}$ ინტერვალში (V_1 და V_2 დადებითი მუდმივებია)

მითითება: ჩაწერეთ $V_1 = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \eta(\eta - 1); V_2 = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \lambda(\lambda - 1); \eta, \lambda > 1$, ხოლო შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $y = \sin^2 \alpha x$, გააკეთეთ $\psi = y^{\frac{\eta}{2}}(1-y)^{\frac{\lambda}{2}} f(y)$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.73*. იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა შემდეგი პოტენციალისათვის

$$U(x) = \frac{U_1}{\left(1 + e^{\frac{x}{a}}\right)^2} - \frac{U_2}{\left(1 + e^{\frac{x}{a}}\right)}; \quad U_{1,2} > 0; \, a > 0$$

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $z = -e^{\frac{x}{a}}$, გააკეთეთ $\psi = z^{\mu}(1-z)^{-\varepsilon} f(z)$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.74*. იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა რომელიც $U = -Fx; \, F. > 0$ ერთგვაროვან ველში მოძრაობს.

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $\xi = \left(x + \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ეირის ფუნქციის განტოლებაზე.

2.75. იპოვეთ ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში ერთგვაროვან ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის.

2.76*. ნაწილაკი მოძრაობს ველში

$$U(z) = \begin{cases} mgz, & z > 0 \\ \infty, & z < 0 \end{cases}$$

იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები.
მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $x=\left(z-\frac{E}{mg}\right)\left(\frac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{1/3}$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ეირის ფუნქციის განტოლებაზე.

2.77*. ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ველში

$$V(x)=V_0\left(\frac{a}{x}-\frac{x}{a}\right)^2;\ \ x>0$$

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $\xi=\frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar a}x^2$, გააკეთეთ $\psi=e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^{\nu}u(\xi)$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.78*.ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ველში

$$V(x)=V_0ctg^2\frac{\pi}{a}x;\ \ 0<x<a$$

ჩაატარეთ ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქციის ნორმირება. განიხილეთ ზღვრული დიდი და მცირე V_0-სათვის.

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $\psi=\left(\sin\frac{\pi}{a}x\right)^{-2\lambda}u$ ჩასმა,სადაც $\lambda=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\pi^2\hbar^2}+1}-1\right),\ \nu=\sqrt{\frac{ma^2}{2\hbar^2\pi^2}\left(E+V_0\right)}$, შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $z=\cos^2\frac{\pi x}{a}$ და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.79*.სისტემა შედგება ორი ერთნაირი M მასის ნაწილაკისაგან. ეს ნაწილაკები ასრულებენ ერთგანზომილებიან მოძრაობას და ურთიერთქმედებენ ერთმანეთთან $F=-k(x_1-x_2)$ ძალით, სადაც x_1 და x_2 ნაწილაკების კოორდინატებია. სისტემა აღიწერება ტალღური ფუნქციით

$$\psi=\exp\left[i\frac{P(x_1+x_2)}{2\hbar}\right]\exp\left[-\frac{\sqrt{Mk/2}(x_1-x_2)^2}{2\hbar}\right]$$

ა) რას უდრის ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობის სრული ენერგიის საშუალო

ბ) განსაზღვრეთ ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობის იმპულსის მოდულის საშუალო

მითითება: ა)შემოიღეთ ცვლადები $x=x_1-x_2, R=x_1+x_2$,დაყვანილი მასა $\mu=\frac{M}{2}$ და ჩაწერეთ $\psi=\psi_x\psi_R$ ბ) შეცვალეთ ცვლადი $y^2=\frac{\sqrt{\mu k}x^2}{\hbar}$

2.2. უწყვეტი სპექტრის მდგომარეობები. პოტენციალურ ბარიერებში ნაწილაკის გასვლა.

2.80. m მასის და E ენერგიის ნაწილაკთა სტაციონალური ნაკადი ეცემა აბსოლუტურად შეუღწევად კედელს:

$$U(x)=\begin{cases}\infty;\ x>0\\ 0;\ x\le 0\end{cases}$$

განსაზღვრეთ ნაწილაკის ადგილმდებარეობის პოვნის ალბათობის სიმკვრივის განაწილება $W(x)$. ვიპოვოთ იმ წერტილების კოორდინატები, სადაც $W(x)$-ს აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა.

2.81. m მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა U_0 სიმაღლის სწორკუთხა პოტენციალურ ბარიერს, რომლის პოტენციალია

$$U(x)=\begin{cases}0;\ x<0\\ U_0>0;\ x\ge 0\end{cases}$$

ნაწილაკის ენერგიაა E, ამასთან $E<U_0$. ვიპოვოთ ნაწილაკის ბარიერს ქვემოთ ეფექტურად შეღწევადობის სიღრმე x_{eff} ანუ მანძილი ბარიერის საზღვრიდან იმ წერტილამდე, სადაც ნაწილაკის პოვნის ალბათობის სიმკვრივე e-ჯერ მცირდება. იპოვეთ x_{eff} ელექტრონისთვის თუ $U_0-E=1$ ევ.

2.82. გამოიყენეთ წინა 2.82 ამოცანის პირობები და

ა) აჩვენეთ, რომ $E<U_0$-თვის ბარიერიდან არეკვლის კოეფიციენტი R ერთის ტოლია.

ბ) განსაზღვრეთ ნაწილაკის ადგილმდებარეობის პოვნის ალბათობის სიმკვრივის განაწილება $W(x)$ იმ შემთხვევაში როცა $E=\dfrac{U_0}{2}$.

2.83. m მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა U_0 სიმაღლის სწორკუთხა პოტენციალურ ბარიერს, რომლის პოტენციალია

$$U(x)=\begin{cases}0;\ x<0\\ U_0>0;\ x\ge 0\end{cases}$$

ნაწილაკის ენერგიაა E, ამასთან $E>U_0$. იპოვეთ ბარიერის R არეკვლის და D გაჟონვის კოეფიციენტები.

2.84. აჩვენეთ, რომ R არეკვლის და D გაჟონვის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$R+D=1$$

2.85. დავამტკიცოთ, რომ R არეკვლის და D გაჟონვის კოეფიციენტები მოცემული ენერგიისთვის არ არის დამოკიდებული იმაზე მარცხნიდან თუ მარჯვნიდან ეცემა ნაწილაკები პოტენციალურ ბარიერს.

2.86. m მასის ნაწილაკი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ პოტენციალურ ველში

$$U(x)=\begin{cases}U_0<0;\ x>0\\ 0;\ x\le 0\end{cases}$$

ნაწილაკის ენერგია $x=0$ წერტილის მარცნივ არის E. იპოვეთ R არეკვლის კოეფიციენტი შემდეგ შემთხვევებში

ა) $E << U_0$; ბ) $E >> U_0$

2.87.m მასის ნაწილაკი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ პოტენციალურ ველში

$$U(x)=\begin{cases}0;\ x<0\\ -U_0;\ 0\le x\le l\\ 0;\ x>l\end{cases}$$

ორმოს გარეთ ნაწილაკის ენერგიაა $E \ge U_0$. ვიპოვოთ:

ა) გაჟონვის კოეფიციენტი D.

ბ) D-ს მნიშვნელობა ელექტრონისთვის როცა $E = U_0 = 1$ ევ, თუ $l = 0{,}1$ ნმ.

2.88. ისარგებლეთ წინა 2.88 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ E ენერგიის მნიშვნელობანი, რომლის დროსაც ნაწილაკი დაუბრკოლებრივ გაივლის ორმოს. დარწმუნდით, რომ ეს მაშინ ხდება, როდესაც l ორმოს სიგრძე ორმოს შიგნით ნაწილაკის დებროილის ტალღის ნახევარსიგრძის ჯერადია. დათვალეთ მინიმალური ენერგია $E_{\min}$ ელექტრონისათვის როცა $U_0 = 10$ ევ და $l = 0{,}25$ ნმ.

2.89.ისარგებლეთ 2.88 ამოცანის პირობებით და ჩათვალეთ, რომ ცნობილია D გაჟონვის კოეფიციენტი, E და U_0. იპოვეთ ორმოს სიგრძე l რომლის დროსაც R არეკვლის კოეფიციენტი მაქსიმალურია.

2.90. m მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა სწორკუთხა პოტენციალურ ბარიერს

$$U(x)=\begin{cases}0;\ x<0\\ U_0>0;\ 0\le x\le l\\ 0; x>l\end{cases}$$

ამასთან $E > U_0$. იპოვეთ

ა) ბარიერის D გაჟონვის კოეფიციენტი მოცემულ შემთხვევაში და D-ს გამოსახულება $E \to U_0$ ზღვარში.

ბ) E ენერგიის პირველი ორი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ელექტრონი დაუბრკოლებრივ გადის ასეთ ბარიერში,თუ $U_0 = 10$ ევ და $l = 0{,}5$ ნმ.

2.91..m მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა სწორკუთხა პოტენციალურ ბარიერს

$$U(x)=\begin{cases}0;\ x<0\\ U_0>0;\ 0\le x\le l\\ 0; x>l\end{cases}$$

ამასთან $E < U_0$. იპოვეთ

ა) ბარიერის D გაჟონვის კოეფიციენტი.

ბ) გაამარტივეთ მიღებული გამოსახულება $D << 1$ შემთხვევაში.

გ) იპოვეთ ელექტრონის და პროტონის ბარიერში გავლის ალბათობა E=5 ევ ენერგიით, თუ $U_0 = 10$ ევ და $l = 0{,}1$ ნმ.

2.92. გამოიყენეთ წინა 2.92 ამოცანის პირობები, ჩათვალეთ, რომ ნაწილაკები ბარიერს ეცემა მარცხნიდან და იპოვეთ $\frac{W(0)}{W(l)}$-ალბათობათა სიმკვრივის შეფარდება $x=0$ და $x=l$ წერტილებში $E=\frac{U_0}{2}$ შემთხვევისათვის.

2.93*.იპოვეთ R არეკვლის კოეფიციენტი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U(x)=\frac{U_0}{1+e^{-\alpha x}}$$

ამასთან $E>U_0$. განიხილეთ ზღვრული შემთხვევები, როცა $E=U_0$, $E\to\infty$ და კლასიკური ზღვარი $\hbar\to 0$ და ფიზიკურად ახსენით მიღებული შედეგები.

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $\xi=-e^{-\alpha x}$, გააკეთეთ $\psi=\xi^{-ik_2/\alpha}w(\xi)\left(k_2=\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}\right)$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე. მიღებულ ამონახსნში განიხილეთ ზღვარი $\xi\to-\infty$

2.94*. იპოვეთ R არეკვლის კოეფიციენტი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U(x)=-\frac{U_0}{e^{\frac{x}{a}}+1}$$

ამასთან $E>0$.

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $\xi=-e^{-\frac{x}{a}}$, გააკეთეთ $\psi=\xi^{-ika}u(\xi)(k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar})$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე. მიღებულ ამონახსნში განიხილეთ ზღვარი $\xi\to-\infty$

2.95*.იპოვეთ D გაჟონვის კოეფიციენტი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U(x)=\frac{U_0}{ch^2\alpha x};\ U_0>0$$

ამასთან $E<U_0$.

მითითება: შრედინგერის განტოლება ამ ამოცანისათვის მიიღება 2.70 ამოცანაში განხილული შემთხვევიდან U_0-ის ნიშნის შეცვლით, ამასთანავე ახლა E ენერგია დადებითია. ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ 2.70 ამოცანაში განხილული ამოხსნის მეთოდი.

2.96*.დაადგინეთ D გაჟონვის კოეფიციენტის ნულისკენ მისწრაფების კანონი, როდესაც $E\to 0$ იმ პირობებში, როცა $U(x)$ პოტენციალური ენერგია სწრაფად ეცემა $|x|>>a$ მანძილებზე, სადაც a ურთიერთქმედების არის მახასიათებელი ზომაა.

მითითება: $|x| >> a$ მანძილებზე $E \to 0$ პირობებში, შრდინგერის განტოლებაში უგუვებელყავით ენერგია და პოტენციალური ენერგია და ამოხსენით მიღებული განტოლება.

2.97*. განსაზღვრეთ არეკვლის და გაჟონვის კოერფიციენტები დირაკის დელტა პოტენციალისათვის $U(x) = \alpha\delta(x)$.

მითითება: ამოხსენით შრედინგერის განტოლება დადებითი ენერგიებისათვის $x < 0$ და $x > 0$ არეებში და "შეკერეთ" მიღებული ამოხსნები $x = 0$ წერტილში.

2.98*. ვიპოვოთ ენერგია, რომლის დროსაც ნაწილაკი არ აირეკლება $U = a[\delta(x) + \delta(x-a)]$ პოტენციალური ბარიერიდან.

მითითება: $x = 0$ და $x = a$ წერტილებში ამოხსნების შეკერვისას გამოიყენეთ 2.43 ამოცანის შედეგები.

2.3. რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები.

2.99. m მასის ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ორგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში ($U = 0$, როცა $0 < x < a,\ 0 < y < b$ და $U = \infty$ ამ არის გარეთ). ვიპოვოთ ენერგიის სპექტრი და ნაწილაკის ψ ნორმირებული ფუნქცია.

2.100. წინა 2.99 ამოცანაში ვიპოვოთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობა უმცირესი ენერგიით $0 < x < a/3,\ 0 < y < b/3$ არეში.

2.101. m მასის ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ორგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში. ორმოს გვერდია l. ვიპოვოთ პირველი ოთხი დონის ენერგია.

2.102. წინა 2.101. ამოცანაში ვიპოვოთ ნაწილაკის მდგომარეობების რიცხვი ენერგიის $(E, E+dE)$ ინტერვალში, თუ ენერგიის დონეები განლაგებულია ძალზე მჭიდროდ.

2.103. m მასის ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის კვადრატულ ორგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში. ვიპოვოთ ნაწილაკის E ენერგია, თუ ნაწილაკის პოვნის მაქსიმალური ალბათობა არის P_m

2.104. ამოხსენით კეპლერის ამოცანა ორგანზომილებიან შემთხვევაში ანუ იპოვეთ ნაწილაკის ენერგიის მნიშვნელობები და ტალღური ფუნქცია პოტენციალურ ველში $V = -\dfrac{Ze^2}{\rho}$, სადაც $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.(**z** კოორდინატზე ფუნქცია არ არის დამოკიდებული).

2.105. ვიპოვოთ ენეგეტიკული დონეები და ტალღური ფუნქციები ბრტყელი იზოტროპული ოსცილატორისა.

2.106*. ვიპოვოთ ენეგეტიკული დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U = k\frac{x^2 + y^2}{2} + \alpha xy; \quad |\alpha| < k$$

მითითება: პოტენციალის გადაწერეთ შემდეგი სახით: $U = k_1(x+y)^2/4 + k_2(x-y)^2/4$, სადაც $k_{1,2} = k \pm \alpha > 0$ და შემოიღეთ ახალი ცვლადები $x_1 = (x+y)\sqrt{2}$ და $y_1 = (y-x)\sqrt{2}$

2.107*.ვიპოვოთ ენერგეტიკული სპექტრი შემდეგი ჰამილტონიანისა

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m}\hat{p}_2^2 + \frac{1}{2}k\left(x_1^2 + x_2^2\right) + \alpha x_1 x_2\,;\ |\alpha| < k$$

მითითება: შემოიღეთ აღნიშვნა: $y_1 = \frac{x}{\gamma}$ და $y_2 = x_2$,სადაც $\gamma = \sqrt{\frac{m}{M}}$ და მიიყვანეთ ჰამილტონიანი დიაგონალურ სახეზე.

2.108. ვიპოვოთ ენერგეტიკული დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები ნაწილაკის სტაციონალური მდგომარეობებისა უსასრულოდ სიმაღლის სამგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში ($U = 0$, როცა $0 < x < a,\ 0 < y < b,\ 0 < z < c$ და $U = \infty$ ამ არის გარეთ).

2.109.m მასის ნაწილაკი იმყოფება l წიბოს მქონე კუბის ფორმის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. ისარგებლეთ წინა 2.109 ამოცანის შედეგებით და იპოვოთ 3-ე და 4-ე დონეების ენერგიების სხვაობა.

2.110. ისარგებლეთ 2.108 ამოცანის ამონახსნით და ვიპოვოთ ნაწილაკის მდგომარეობების რიცხვი ენერგიის $(E, E+dE)$ ინტერვალში, თუ ენერგიის დონეები განლაგებულია ძალზე მჭიდროდ.

2.111*. ორი m მასის ნაწილაკი მოძრაობს მხოლოდ OX ღერძის გასწვრივ, ისე რომ ერთმანეთთან დრეკადი ძალით არიან დაკავშირებული. გარდა ამისა თითოეული ნაწილაკი $x = 0$ წერტილთან იმავე ტიპის ძალით არიან დაკავშირებული, ოღონდ სხვა დრეკადობის კოეფიციენტით. განსაზღვრეთ სისტემის ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქცია.

მითითება: შემოიღეთ მასათა ცენტრის კოორდინატი $X_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$ და ფარდობითი კოორდინატი $x = x_1 - x_2$ და განაცალეთ ცვლადები.

თავი 3. იმპულსის მომენტი.

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

იმპულსის მომენტის $\hat{\vec{L}} = \left[\hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}\right]$ ოპერატორის $\hat{L}_i$ მდგენელები სფერულ კოორდინატებში მხოლოდ θ და φ კუთხეებზე არიან დამოკიდებული. მაგალითად

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.1}$$

რომლის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობებია $(\hbar m \equiv l_z)$

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{3.2}$$

$\hat{L}^2$ იმპულსის მომენტის კვადრატის ოპერატორი გამოისახება ლაპლასის ოპერატორის კუთხური ნაწილით; მისი საკუთარი მნიშვნელობებია $l(l+1)$, ამასთან $l = 0,1,2,3\ldots$ ნაწილაკის ტალღური ფუნქციის მხოლოდ კუთხური ნაწილის განხილვისას $\hat{L}^2$ და $\hat{L}_z$ ოპერატორები ადგენენ სრულ სისტემას, რომელთა ნორმირებული საკუთარი ფუნქციებია $\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi)$ სფერული ფუნქციები

$$\hat{L}^2 \mathrm{Y}_{lm} \equiv -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\mathrm{Y}_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\mathrm{Y}_{lm} \tag{3.3}$$

$$\hat{L}_z \equiv -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathrm{Y}_{lm} = m\hbar \mathrm{Y}_{lm} \tag{3.4}$$

მათ შემდეგი სახე აქვთ

$$\mathrm{Y}_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^l \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) e^{im\varphi} \tag{3.5}$$

$$P_l^{|m|}(\cos\theta) = \sin^{|m|}\theta \frac{d^{|m|}}{d(\cos\theta)^{|m|}} P_l(\cos\theta) \tag{3.6}$$

სადაც P_l და $P_l^{|m|}$ შესაბამისად ლეჟანდრის და მიკავშირებული ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომებია. ამასთან $\mathrm{Y}_m^{\bullet} = (-1)^{l-m}\mathrm{Y}_{l,-m}$; $\int \mathrm{Y}_{lm}^{\bullet}\mathrm{Y}_{l'm'} d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$.

სფერულ ფუნქციებს გააჩნიათ $I = (-1)^l$ ლუწობა. მათთვის სამართლიანია ”შეკრების თეორემა”:

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{n}\vec{n}') = \sum_{m=-l}^{l} \mathrm{Y}_{lm}(\vec{n})\mathrm{Y}_{lm}^{\bullet}(\vec{n}') \tag{3.7}$$

სადაც $\vec{n}$ და $\vec{n}'$ სათანადო მიმართულებების ორტებია. ამასთან

$$\mathrm{Y}_{lm}(\vec{n}) \equiv \mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi): \quad \vec{n}\vec{n}' = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') \tag{3.8}$$

სფერული ფუნქციებს ქვედა ორბიტალური მომენტებისათვის შემდეგი სახე აქვთ:

$$\mathrm{Y}_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}};\ \mathrm{Y}_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta;\ \mathrm{Y}_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\varphi} \qquad (3.9)$$

$$\mathrm{Y}_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(1-3\cos^2\theta\right);\ \mathrm{Y}_{2,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta e^{\pm i\varphi};\ \mathrm{Y}_{2,\pm2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}$$

3.1. ვიპოვოთ საკუთარი მნიშვნელობები და ნორმირებული საკუთარი ფუნქციები შემდეგი ოპერატორებისა ა) $\hat{L}_z$; ბ) $\hat{L}_z^2$

3.2. დავამტკიცოთ, რომ $\hat{L}_z$ ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია. დამტკიცება ჩავატაროთ პოლარულ და დეკარტეს კოორდინატებში.

3.3 დავამტკიცოთ $\hat{L}^2$ ოპერატორის ერმიტულობა იმის გათვალისწინებით, რომ $\hat{L}_x$ $\hat{L}_y$ და $\hat{L}_z$ ერმიტული ოპერატორებია.

3.4. დავამტკიცოთ, რომ

$$\left[\hat{L}_i, r_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} r_k$$

სადაც [ ] აღნიშნავს კომუტატორს, ხოლო ε_{ijk} სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია.

3.5. დავამტკიცოთ, რომ

$$\left[\hat{L}_i, p_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} p_k$$

სადაც [ ] აღნიშნავს კომუტატორს, ხოლო ε_{ijk} სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია.

3.6. დავამტკიცოთ, რომ

$$\left[\hat{L}_i, \hat{L}_j\right] = i\hbar\varepsilon_{ijk} \hat{L}_k$$

სადაც [ ] აღნიშნავს კომუტატორს, ხოლო ε_{ijk} სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია.

3.7. ვაჩვენოთ, რომ L^2 კომუტირებს თითოეულ L_i-თან.

3.8. დავამტკიცოთ, რომ

$$\hat{\vec{L}} \times \hat{\vec{L}} = i\hbar\hat{\vec{L}}$$

3.9. დავამტკიცოთ, რომ $\hat{L}_z$ ოპერატორი კომუტირებს კინეტიკური ენერგიის $\hat{K}$ ოპერატორთან.

3.10. დავთვალოთ შემდეგი კომუტატორი

$$\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right]$$

სადაც $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

3.11. დავთვალოთ შემდეგი კომუტატორი

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right]$$

სადაც $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

3.12. ვაჩვენოთ, რომ

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0$$

3.13. ვაჩვენოთ, რომ

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z$$

3.14. ვიპოვოთ შემდეგი კომუტატორები:

ა) $\left[\hat{l}_i,\hat{\vec{r}}^2\right],\left[\hat{l}_i,\hat{\vec{p}}^2\right],\left[\hat{l}_i,\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{r}}\right)\right],\left[\hat{l}_i,\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{r}}\right)^2\right]$; ბ) $\left[\hat{l}_i,\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{r}}\right)\hat{p}_k\right],\left[\hat{l}_i,\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{r}}\right)\hat{x}_k\right],\left[\hat{l}_{i,}\left(a\hat{x}_k+b\hat{p}_k\right)\right]$

გ) $\left[\hat{l}_i,\hat{x}_k\hat{x}_l\right],\left[\hat{l}_i,\hat{p}_k\hat{p}_l\right],\left[\hat{l}_i,\hat{x}_k\hat{p}_l\right]$, სადაც a და b მუდმივებია.

3.15. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left[\hat{L}^2,z\right]=2i\hbar\left(x\hat{L}_y-y\hat{L}_x-i\hbar z\right)$$

3.16. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left[\hat{L}^2,\left[\hat{L}^2,z\right]\right]=2\hbar^2\left(z\hat{L}^2+\hat{L}^2z\right)$$

მითითება: ისარგებლეთ წინა 3.15 ამოცანის შედეგით და იმ ფაქტით, რომ სკალარული ნამრავლი $\vec{r}\hat{\vec{L}}=0$

3.17. დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left[\hat{L}_i,\hat{A}_k\right]=i\hbar\varepsilon_{ikl}\hat{A}_l$$

სადაც $\hat{A}_k$ არის ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი ვექტორული ოპერატორის k მდგენელი.

3.18. წინა 3.17 ამოცანის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

$$\left[\hat{L}_x^2,\hat{A}_x\right]=0;\ \left[\hat{L}_y^2,\hat{A}_x\right]=-2i\hat{L}_y\hat{A}_z-\hat{A}_x;\ \left[\hat{L}_z^2,\hat{A}_x\right]=2i\hat{L}_z\hat{A}_y-\hat{A}_x$$

3.19. 3.16 ამოცანის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left[\hat{\vec{L}}^2,\hat{A}_x\right]=2i\left(\hat{L}_z\hat{A}_y-\hat{L}_y\hat{A}_z\right)-2\hat{A}_x$$

3.20.იპოვეთ ნორმირებული ψ_{r_0lm} ტალღური ფუნქციები, რომლებიც აღწერენ სათავიდან r_0 მანძილზე მყოფი ნაწილაკის მდგომარეობას (ნაწილაკს გააჩნია l ორბიტალურ მომენტის და მისი z ღერძზე m პროექცია)

3.21. იპოვეთ ნაწილაკის z ღერძზე იმპულსის ოპერატორის პროექციის და იმპულსის მომენტის საერთო საკუთარი ფუნქციები.

3.22*. ბრტყელი როტატორი იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღიწერება $\psi(\varphi)=A\sin\varphi$ ტალღური ფუნქციით. შეიძლება თუ არა იმპულსის მომენტის გაზომვისას მივიღოთ $l_z=2\hbar$ მნიშვნელობა?

მითითება: გაშალეთ $\psi(\varphi)=A\sin\varphi$ ფუნქცია $\hat{l}_z$ ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებად და იპოვეთ m მაგნიტური კვანტური რიცხვის შესაძლო მნიშვნელობები.

3.23. როტატორი იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღიწერება $\psi(\varphi)=\dfrac{2}{\sqrt{3\pi}}\sin^2\varphi$ ტალღური ფუნქციით. დათვალეთ $\left\langle l_z^2\right\rangle$ საშუალო ორი მეთოდით: ალბათობებით და ოპერატორის საშუალებით.

3.24*. ვაჩვენოთ, რომ $\hat{l}_\pm=\hat{l}_x\pm i\hat{l}_y$ ოპერატორებით Ψ_m საკუთარ ფუნქციაზე $\left(\hat{l}_z\Psi_m=m\Psi_m\right)$ მოქმედების შედეგად მიღებული ფუნქცია კვლავ $\hat{l}_z$ ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა, რომლებიც შეესაბამება $m+1$ და $m-1$ საკუთარ მნიშვნელობებს შესაბამისად $\hat{l}_+$ და $\hat{l}_-$ ოპერატორებისათვის.

მითითება: გამოიყენეთ 3.11 ამოცანის შედეგი.

3.25*. 3.24 ამოცანაში განხილული $\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y$ ამწევი და დამწევი ოპერატორებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები

$$\hat{l}_{\pm}\psi_l^m = A_l^m \psi_l^{m\pm1}$$

სადაც A_l^m მუდმივებია. იპოვეთ ეს მუდმივები, თუ ტალღური ფუნქციები ნორმირებულია.

მითითება: გამოიყენეთ 3.13ამოცანის შედეგი.

3.26.ვაჩვენოთ, რომ Ψ_m მდგომარეობაში $\left(\hat{l}_z \Psi_m = m\Psi_m\right)$ საშუალოებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

ა) $\left\langle \hat{l}_x \right\rangle = \left\langle \hat{l}_y \right\rangle = 0$; ბ) $\left\langle \hat{l}_x \hat{l}_y \right\rangle = -\left\langle \hat{l}_y \hat{l}_x \right\rangle = im/2$; გ) $\left\langle \hat{l}_x^2 \right\rangle = \left\langle \hat{l}_y^2 \right\rangle$

3.27. Ψ_{lm} მდგომარეობაში, როდესაც განსაზღვრული მნიშვნელობები აქვთ l იმპულსის მომენტს და მის m პროექციას z ღერძზე, იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობები $\left\langle \hat{l}_x^2 \right\rangle$ და $\left\langle \hat{l}_y^2 \right\rangle$.

3.28. იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობა ფიზიკური სიდიდისა, რომელიც აღიწერება $\hat{l}_z^2$ ოპერატორით $\psi(\varphi) = A\sin^2\varphi$ მდგომარეობაში.

3.29. ვიპოვოთ საშუალო მნიშნელობები $\left\langle (\Delta\varphi)^2 \right\rangle$ და $\left\langle (\Delta L_z)^2 \right\rangle$ სისტემისათვის, რომელიც იმყოფება $\psi(\varphi) = A\sin\varphi$ მდგომარეობაში.

3.30. ვაჩვენოთ, რომ ψ მდგომარეობაში, რომელშიც $\hat{l}_z$ ოპერატორს გააჩნია განსაზღვრული საკუთარი მნიშვნელობა, საშუალოებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები $\left\langle \hat{l}_x \right\rangle = \left\langle \hat{l}_y \right\rangle = 0$

3.31. გამოვთვალოთ იმპულსის მომენტის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობა $\psi(\theta,\varphi) = A\sin\theta\cos\varphi$ მდგომარეობაში.

3.32. ნებისმიერ ღერძზე იმპულსის მომენტის შესაძლო მნიშვნელობებია $m\hbar$, სადაც $m = l, l-1, \ldots -l$. გაითვალისწინეთ, რომ ეს მნიშვნელობები თანაბრად ალბათურია და ღერძები თანასწორუფლებიანია. ვაჩვენოთ, რომ მდგომარობაში მოცემული l-ით, საშუალო მნიშვნელობა იმპულსის მომენტის კვადრატისა ტოლია $\left\langle L^2 \right\rangle = \hbar^2 l(l+1)$

3.33.*აჩვენეთ, რომ თუ ψ არის $\hat{L}^2$ და $\hat{L}_z$ ოპერატორების საკუთარი ფუნქცია, მაშინ $\hat{L}^2$ ოპერატორის საკუთარი მნიშნელობის კვადრატი მეტია ან უდრის $\hat{L}_z$ ოპერატორის საკუთარი მნიშნელობის კვადრატს.

მითითება: დათვალეთ $\hat{L}^2$ ოპერატორის საშუალო

3.34. ψ_{lm} საკუთარი ფუნქციაა $\hat{L}^2$ და $\hat{L}_z$ ოპერატორების $\hbar^2 l(l+1)$ და $\hbar m$ საკუთარი მნიშვნელობებით. აჩვენეთ, რომ $\varphi = \left(L_x + iL_y\right)\psi_{lm}$ ფუნქციაც საკუთარი ფუნქციაა $\hat{L}^2$ და $\hat{L}_z$ ოპერატორების და იპოვეთ φ ფუნქციების საკუთარი მნიშვნელობები.

3.35.* აჩვენეთ, რომ $l = 0$ მნიშვნელობისათვის წინა 3.34 ამოცანაში განხილული φ ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა $\hat{L}_x$ და $\hat{L}_y$ ოპერატორების.

მითითება: $\hat{L}^2$ ოპერატორით იმოქმედეთ $\hat{L}_x\psi_{00}=\sum_{l,m}A_{lm}\psi_{lm}$ ტოლობაზე და აჩვენეთ, რომ ყველა $A_{lm}=0$ გარდა A_{00}-ისა.

თავი 4. მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში.

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

ცენტრალური პოტენციალისათვის შრედინგერის სტაციონალური განტოლების

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U(r)\right]\Psi_E(\vec{r})=E\Psi_E(\vec{r}) \tag{4.1}$$

ამონახსნი, $\hat{H},\hat{\vec{L}}^2,\hat{L}_z$ ოპერატორების ურთიერთკომუტატურობის გათვალისწინებით, შემდეგი სახით შეიძლება ვეძებოთ

$$\Psi_{n_r lm}=R_{n_r l}(r)\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\varphi) \tag{4.2}$$

სადაც Y_{lm} სფერული ფუნქციაა. ამ თავში განხილულია მხოლოდ დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები და ენერგიები აღინიშნება $E_{n_r l}$-ით, სადაც $n_r=0,1,2...$ რადიალური კვანტური რიცხვია. ამასთან $R_{n_r l}(r)$ ფუნქციისათვის მიიღება შემდეგი შრედინგერის რადიალური განტოლება

$$\frac{d^2R_{n_r l}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_{n_r l}}{dr}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(r)-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]R_{n_r l}=0 \tag{4.3}$$

(4.3) გატოლების ამოსახსნელად ხშირად ხელსაყრელია გადავიდეთ ახალ ცვლადზე

$$\chi_{n_r l}=rR_{n_r l} \tag{4.4}$$

რომლისთვისაც განტოლება შემდეგ სახეს ღებულობს

$$\frac{d^2\chi_{n_r l}}{dr^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left[E-U(r)-\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}\right]\chi_{n_r l}=0 \tag{4.5}$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$\chi_{n_r l}(0)=0 \tag{4.6}$$

(4.5) ფორმალურად ემსგავსება შრედინგერის განტოლებას ერთგანზომილებიან შემთხვევაში.

ხშირად სარგებლობენ შემედი ჩასმითაც

$$u_{n_r l}=\sqrt{r}R_{n_r l} \tag{4.7}$$

და $u_{n_r l}$ ფუნქციისათვის მიიღება შემდეგი განტოლება

$$\frac{d^2u_{n_r l}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_{n_r l}}{dr}-\left[\frac{(l+1/2)^2}{r^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(U(r)-E_{n_r l}\right)\right]u_{n_r l}=0 \tag{4.8}$$

სასზღვრო პირობით

$$u_{n_r l}(0)=0 \tag{4.9}$$

4.1 დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები.

4.1 m მასის ნაწილაკი იმყოფება სფერულად სიმეტრიულ პოტენციალურ ორმოში, სადაც $U(r)=0$, როცა $r<r_0$ და $U(r)=\infty$, როცა $r>r_0$, სადაც r_0 ორმოს რადიუსია. ვიპოვოთ ენერგიის მნიშვნელობები და ნორმირებული ტალღური ფუნქცია ნაწილაკისა $l=0$ მდგომარეობაში.
მითითება: შრედინგერის განტოლების ამოხსნისას ისარგებლეთ $\psi=\chi/r$ ჩასმით.
4.2. წინა 4.1 ამოცანაში ვიპოვოთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობის მაქსიმუმის წერტილი $r_{\max}$ და ძირითად მდგომარეობაში მისი პოვნის W ალბათობა $r<r_{\max}$ არეში.
4.3. ისარგებლეთ 4.1 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ საშუალო $\langle r\rangle, \langle r^2\rangle$ მნიშვნელობები და საშუალო კვადატული გადახრები $\left\langle (r-\langle r\rangle)^2\right\rangle$ ნაწილაკისთვის, რომელიც იმყოფება n-ე $s(l=0)$ დონეზე.
4.4*. ისარგებლეთ 4.1 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ ψ ტალღური ფუნქციის $R_1(r)$ რადიალური ნაწილი, რომელიც აღწერს ნაწილაკის p მდგომარეობას $(l=1)$.
მითითება: გააწარმოეთ $s(l=0)$ მდგომარეობის $R_0(r)$ აღმწერი შრედინგერის რადიალური განტოლება და მიღებული განტოლება შეადარეთ $R_1(r)$-ის განტოლებას.
4.5. იპოვეთ წინა 4.4 ამოცანის პირველი p დონის ენერგია და შეადარეთ ის ძირითადი მდგომარეობის ენერგიას.
4.6. m მასის ნაწილაკი იმყოფება სფერულად სიმეტრიულ პოტენციალურ ორმოში, სადაც $U(r)=0$, როცა $r<r_0$ და $U(r)=U_0$, როცა $r\geq r_0$, სადაც r_0 ორმოს რადიუსია. ა) $E<U_0$ არეში $s(l=0)$ მდგომარეობისათვის მიიღეთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება. ბ) დარწმუნდით, რომ მოცემულ ორმოს ყოველთვის არ გააჩნია დისკრეტული დონეები (ბმული მდგომარეობები). განსაზღვრეთ $r_0^2U_0$ სიდიდის მნიშვნელობების ინტერვალი, როდესაც ორმოს მხოლოდ ერთი დონე გააჩნია.
4.7. წინა 4.6 ამოცანაში ჩათვალეთ, რომ $r_0^2U_0=\dfrac{8\pi^2\hbar^2}{27m}$. იპოვეთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობის მაქსიმუმის წერტილი $r_{\max}$, $s(l=0)$ მდგომარეობაში და მისი პოვნის ალბათობა $r>r_0$ არეში.

4.8. იპოვეთ $s(l=0)$ მდგომარეობების დონეები შემდეგი პოტენციალისათვის

$$U=-\alpha\delta(r-a)$$

4.9*. იპოვეთ $s(l=0)$ მდგომარეობების დონეები ექსპონენციალური პოტენციალისათვის

$$U=-U_0e^{-\frac{r}{a}}$$

მითითება: შრედინგერის განტოლება $x = -\exp\left\{-\frac{r}{2a}\right\}$ ჩასმით მიიყვანეთ ბესელის განტოლებამდე.

4.10*. იპოვეთ $s\,(l=0)$ მდგომარეობების დონეები ჰულტენის პოტენციალისათვის

$$U = -\frac{U_0}{e^{\frac{r}{a}} - 1}$$

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი $x = e^{-\frac{r}{a}}$, გააკეთეთ $\chi_{n_r 0} = x^{\varepsilon}\left(\varepsilon = \eta a; \eta = \sqrt{-\frac{2mE_{n_r 0}}{\hbar^2}}\right)$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

4.11. m მასის ნაწილაკის მდგომარობა აღიწერება შემდეგი არანორმირებული ტალღური ფუნქციით

$$\psi_k = \frac{e^{-ikr} + e^{ikr}}{r}$$

ა) იპოვეთ ნაწილაკის ენერგია

ბ) თავისუფალია თუ არა ნაწილაკი?

4.12*. m მასის ნაწილაკი იმყოფება სფერულად სიმეტრიულ პოტენციალურ ორმოში, სადაც $U(r) = 0$, როცა $r < r_0$ და $U(r) = \infty$, როცა $r > r_0$, სადაც r_0 ორმოს რადიუსია. ვიპოვოთ ენერგიის მნიშვნელობები და ნორმირებული ტალღური ფუნქცია ნაწილაკისა ნებისმიერი l-თვის.

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $\Psi_{n_r lm} = Y_{lm}(\theta,\varphi)\chi_{n_r l}(r)/\sqrt{r}$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ბესელის ფუნქციების განტოლებაზე.

4.13*. წინა 4.12 ამოცანისათვის ძირითადი მდგომარეობისათვის იპოვეთ განაწილების ფუნქცია ნაწილაკის იმპულსების მიხედვით.

მითითება: ძირითადი მდგომარეობის ნორირებული ტალღური ფუნქცია $\Psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\frac{\sin(\pi r/a)}{r}$, ჩაწერეთ იმპულსურ წარმოდგენაში.

4.14*. იპოვეთ ენერგიის დონეები შემდეგი პოტენციალისათვის

$$U = -a\delta(r - a)$$

როგორია დისკრეტული დონეების პოვნის პირობა ნებისმიერი l-თვის?

მითითება: შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ $\Psi_{n_r lm} = Y_{lm}(\theta,\varphi)\chi_{n_r l}(r)/\sqrt{r}$ ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ბესელის მოდიცირებული ფუნქციების განტოლებაზე.

4.15. ისარგებლეთ $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$ ჩასმით და იპოვეთ ბმული მდგომარეობების $R(r)$ რადიალური ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური სახე ელექტრონის ბირთვის კულონურ ველში მოძრაობისას ა) დიდ და ბ) მცირე მანძილებზე

4.16.წყალბადის ატომში ელექტრონი იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღიწერება $\psi = A(1+ar)e^{\alpha r}$ ტალღური ფუნქციით,სადაც A,a და α მუდმივებია. იპოვეთ:

ა) შრედინგერის განტოლების გამოყენებით a,α მუდმივები.

ბ) ნორმირების A კოეფიციენტი.

4.17. წყალბადის ატომის ძირითად მდგომარეობაში. ვიპოვოთ

ა) საშუალო $\left\langle r^n \right\rangle$, სადაც n მთელი რიცხვია.

ბ) ელექტრონის საშუალო კინეტიკური და პოტენციალური ენერგიები.

გ)ელეტრონის განაწილების ფუნქცია იმპულსების მიხედვით.

4.18. ვიპოვოთ წყალბადის ატომში ელექტრონის დენის სიმკვრივის კომპონენტები სფერულ კოორდინატებში.

4.19. ნაწილაკი თავისუფლად მოძრაობს Oyz სიბრტყეში $0 \le y \le a$ და $0 \le z \le b$ მართკუთხედის ფარგლებში. სიბრტყის დანარჩენი ნაწილი მიუწვდომელია ნაწილაკისათვის. OX ღერძის გასწვრივ მოძრაობისას კი მასზე მოქმედებს $F=-kx$ ძალა. ვიპოვოთ ამ ნაწილაკის ენერგიის დონეები და ნორმირების კოეფიციენტი.

4.20. ელექტრონისათვის წყალბადის ატომში ამოხსენით შრედინგერის განტოლება პარაბოლურ კოორდინატებში.

4.21. ვიპოვოთ წყალბადის ატომის ტალღური ფუნქცია და ენერგიის სპექტრი ბირთვის მოძრაობის გათვალისწინებით.

4.22*. ვიპოვოთ წყალბადის ატომის $1s,2s$ და $2p$ ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში.

მითითება: ისარგებლეთ შემდეგი კავშირით ტალღური ფუნქციების კოორდინატულ და იმპულსურ წარმოდგენებს შორის $g_l(p)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}i^{-l}\int_0^\infty j_l(kr)\chi_l(r)dr$,სადაც $j_l(kr)$ ბესელის სფერული ფუნქციაა.

4.23*. დაამტკიცეთ კულონის პოტენციალისათვის კრამერსის რეკურენტული ფორმულა $\left\langle r^k \right\rangle$ საშუალოებისათვის

$$-\frac{k+1}{n^2}\left\langle r^k \right\rangle + (2k+1)\left\langle r^{k-1} \right\rangle + k\left[\frac{k^2-1}{4} - l(l+1)\right]\left\langle r^{k-2} \right\rangle = 0$$

მითითება: კულონის პოტენციალისათვის შრედინგერის რადიალური განტოლება გაამრავლეთ $r^{k+1}R' - \frac{k+1}{2}r^k R$ -ზე და აინტეგრეთ r -ით.

4.24.წყალბადის ატომში ელექტრონის $2s$ მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს

$$\Psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}(2-\rho)e^{-\frac{\rho}{2}}\left(\frac{1}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}$$

სადაც $\rho = \frac{r}{a_0}$, ხოლო $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ ბორის პირველი რადიუსია.

განსაზღვრეთ:

ა) მანძილი ბირთვიდან, რომელზედაც ელექტრონის პოვნის ალბათობას მაქსიმუმი გააჩნია

ბ) მანძილი ბირთვიდან, რომელზედაც ელექტრონის პოვნის ალბათობა ნულია

4.25. ვაჩვენოთ, რომ თუ წყალბადის ატომში სხვადასხვა m-ებით (მაგნიტური ველის არარსებობისას) პოვნის ალბათობა ერთნაირია, მაშინ კუთხური განაწილება ალბათობის სიმკვრივისა სფერულად სიმეტრულია $p(l=1)$ მდგომარეობაში (ქვეგარსში)

4.26. წყალბადის ატომის ელეტრონის $2p$ მდგომარეობაში გამოთვალეთ ელექტრონის პოვნის ალბათობა $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{me^2}$ ბორის პირველი რადიუსის შიგნით, როცა θ კუთხე იცვლება 0-დან $\pi/2$-მდე.

4.27. იპოვეთ ენერგიის დონეები სამგანზომილებიანი ანიზოტროპული ჰარმონიული ოსცილატორისათვის, რომლის პოტენციური ენერგიაა

$$V = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}$$

4.28. ვიპოვოთ ენერგიის დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები სფერული ოსცილატორისა $U(r) = \dfrac{kr^2}{2}$ თუ გამოვიყენებთ ცვლადების განცალების მეთოდს შრედინგერის განტოლებაში დეკარტეს კოორდინატებში. იპოვეთ დონეების გადაგვარების ჯერადობა.

4.29.ვიპოვოთ ენერგიის დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები სფერული ოსცილატორისა $U(r) = \dfrac{kr^2}{2}$ სფერულ კოორდინატებში.

4.30. ვაჩვენოთ, რომ სივრცული ოსცილატორისათვის

$$\hat{T}_{ik} = \hat{p}_i \hat{p}_k / m + k\hat{x}_i \hat{x}_k$$

ოპერატორები კომუტირებენ $\hat{H} = \dfrac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + \dfrac{k\vec{r}^{\,2}}{2}$ ჰამილტონიანთან. ასევე აჩვენეთ, რომ $\hat{\vec{l}}^{\,2}$ და $\hat{T}_{11}$ ოპერატორები არ კომუტირებენ ერთმანეთთან.

4.31*. იპოვეთ ენერგიის დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} :\ A > 0;\ B > 0$$

მითითება: $\rho = \dfrac{2\sqrt{-2mE}}{\hbar} r$; $\dfrac{2mA}{\hbar^2} + l(l+1) = s(s+1)$; $\dfrac{B}{\hbar}\sqrt{\dfrac{m}{-2E}} = n$ აღნიშვნებით ამოცანა დადის კულონურ ველში მოძრაობაზე.

4.32* იპოვეთ ენერგიის დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U = \frac{A}{r^2} + Br^2 :\ A > 0;\ B > 0$$

მითითება: $\xi=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}r^2$; $\frac{2mA}{\hbar^2}+l(l+1)=2s(2s+1)$; $\frac{E}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{B}}=4(n+s)+3$
აღნიშვნებით და $R=e^{-\xi/2}\xi^s w$ ჩასმით ამოცანა დადის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე..

4.33*.იპოვეთ დისკრეტული ენერგიის დონეები $l=0-$თვის ვუდ-საქსონის

$$V(r)=-\frac{V_0}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}$$

პოტენციალისათვის, სადაც $a<<R$

მითითება: დამოუკიდებელი ცვლადის შეცვლით $y=\frac{1}{1+e^{\frac{r-R}{a}}}$ და

$\chi(y)=y^{\nu}(1-y)^{\mu}f(y)$ ჩასმით ამოცანა დადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე..

4.34*. ვიპოვოთ s დონეების არსებობისა და ახალი დისკრეტული დონეების გაჩენის პირობები შემდეგი პოტენციალებისათვის

ა) $U(r)=\begin{cases}-\frac{\alpha}{r^4}: r>a\\ \infty; r<a\end{cases}$ ბ) $U(r)=-\frac{\alpha}{(r+a)^4}; a>0$ გ) $U(r)=-\frac{U_0a^4}{(r^2+a^2)^2}; a>0$

მითითება: ისარგებლეთ შრედინგერის განტოლებით $E=0$-თვის.

4.35*. იპოვოთ s დონეების არსებობისა და ახალი დისკრეტული დონეების გაჩენის პირობები შემდეგი პოტენციალებისათვის

ა) $U(r)=\begin{cases}-\frac{\alpha}{r^s}: r>a\\ \infty; r<a; s>2\end{cases}$ ბ) $U(r)=\begin{cases}-\frac{\alpha}{r^s}: r<a\\ 0; r>a; 0<s<2\end{cases}$

მითითება: ისარგებლეთ შრედინგერის განტოლებით $E=0$-თვის.

4.36*.განიხილეთ დონეების არსებობისა და ახალი დისკრეტული დონეების გაჩენის პირობები $l\neq 0$ შემთხვევაში, როდესაც ღრმავდება პოტენციალური ორმო. რა თვისობრივი განსხვავებაა $l=0$ შემთხვევისაგან. განიხილეთ კონკრეტული მაგალითები:

ა) $U(r)=-\alpha\delta(r-a)$ ბ) $U(r)=\begin{cases}-\frac{\alpha}{r^4}: r>a\\ \infty; r<a\end{cases}$

მითითება: ისარგებლეთ შრედინგერის განტოლებით $E=0$-თვის.

4.37*. ცენტრალური $U_0(r)$პოტენციალის პარამეტრები ისეთია, რომ მას გააჩნია დისკრეტული სპექტრი $l=0$-ით და $E=0$.ამ მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია (ანუ დონის გაჩენის მომენტში) $\Psi_0=\frac{\chi_0(r)}{\sqrt{4\pi}r}$ ცნობილად ითვლება და ნორმირებულია შემდეგი პირობით: $\chi_0(r)\to 1$, როცა $r\to\infty$ ვაჩვენოთ, რომ ამ დონის δE_0 წანაცვლება $\delta U<0$ მცირე შეშფოთების გამო აღიწერება შემდეგი გამოსახულებით

$$\delta E_0\approx-\frac{2m}{\hbar^2}\left[\int_0^{\infty}\delta U(r)\chi_0^2(r)dr\right]^2$$

მითითება: ამოხსნისას სიმარტივისათვის ჩათვალეთ, რომ $U \equiv 0$ როცა $r > a$, სადაც a პოტენციალის რადიუსია.

4.38*. ვაჩვენოთ, რომ წინა 4.37 ამოცანის განზოგადებისას $l \neq 0$ შემთხვევაში დონის δE_0 წანაცვლებისთვის მივიღებთ

$$\delta E_l \approx \int_0^\infty \delta U(r)\left(\chi_l^{(0)}(r)\right)^2 dr$$

სადაც $\chi_l^{(0)}$ ტალღური ფუნქციაა დონის წარმოქმნის მომენტში $\left(\Psi^{(0)} = \chi_l^{(0)} Y_{lm} / r\right)$ უკვე ნორმირებულია ჩვეულებრივი პირობით $\int_0^\infty \left(\chi_l^{(0)}(r)\right)^2 dr = 1$. ყურადღება მიაქციეთ განსხვავებას: $\delta E_l \propto \delta U$, როცა $l \neq 0$ და $\delta E_0 \propto -(\delta U)^2$, როცა $l = 0$. ახსენით ეს ფაქტი.

4.39*.მიზიდვის მონოტონური პოტენციალისათვის $U'(r) \geq 0$ და $U(r) \to 0$, როცა $r \to \infty$, ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი უტოლობა

$$\frac{2}{\pi\hbar} \int_0^\infty \sqrt{-2mU(r)} dr \geq 1$$

აუცილებელი პირობაა ამ პოტენციალისთვის ბმული მდგომარეობის არსებობისათვის.

4.2. აქსიალური სიმეტრიის მქონე სისტემები.

4.40. ვიპოვოთ I ინერციის მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორის სტაციონალური მდგომარეობების ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები. რამდენჯერადაა გადაგვარებული დონეები?

4.41.ბრტყელი როტატორის მდგომარეობა აღიწერება ტალღური ფუნქციით $\Psi = C\cos^n \varphi$,სადაც n მთელი რიცხვია. ვიპოვოთ როტატორის განაწილების ფუნქცია იმპულსის მომენტის და ენერგიის პროექციის მიხედვით. იპოვეთ აგრეთვე ამ სიდიდეების საშუალოები მოცემულ მდგომარეობაში.

4.42 ვიპოვოთ I ინერციის მომენტის მქონე სივრცული როტატორის სტაციონალური მდგომარეობების ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები. რამდენჯერადაა გადაგვარებული დონეები?

4.43.სივრცული როტატორის მდგომარეობა აღიწერება ტალღური ფუნქციებით $\Psi = C\cos^2 \theta$. ვიპოვოთ როტატორის განაწილების ფუნქცია ენერგიის, იმპულსის მომენტის კვადრატის და იმპულსის მომენტის პროექციის მიხედვით. იპოვეთ აგრეთვე ამ სიდიდეების საშუალოები მოცემულ მდგომარეობაში.

4.44.ვიპოვოთ ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის სტაციონალური მდგომარეობების ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები. რამდენჯერადაა გადაგვარებული დონეები?

4.45. ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის Ψ_{11} სტაციონალურ მდგომარეობაში იპოვეთ იმპულსის მომენტის პროექციის სხვადასხვა მნიშვნელობების პოვნის ალბათობები იმ ღერძზე, რომელიც რხევის სიბრტყის პერპენდიკულარულია .

4.46*. ნაწილაკი იმყოფება აქსიალური სიმეტრიის მქონე $U(\rho)$ ველში. იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციაიები.
მითითება: ისარგებლეთ ცილინდრულ კოორდინატებით და იმ ფაქტით, რომ $\hat{p}_z$ და $\hat{l}_z$ ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამ ამოცანის ჰამილტონინთან.
4.47*.იპოვეთ ენერგიის დონეები და სტაციონალური მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ორგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში

$$U(\rho)=\begin{cases}0,\ \rho\le a\\ \infty,\rho>a\end{cases}$$

მითითება: ისარგებლეთ პოლარული კოორდინატებით და იმ ფაქტით, რომ $\hat{l}_z$ ოპერატორი კომუტირებს ამ ამოცანის ჰამილტონინთან და განტოლება დაიყვანეთ ბესელის ფუნქციების განტოლებაზე..
4.48*.იპოვეთ დისკრეტული სპექტრის ენერგიის დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება შემდეგ ორგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში

$$U(\rho)=\begin{cases}-U_0,\ \rho<a\\ 0,\rho\ge a\end{cases}$$

განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც იმპულსის მომენტის პროექცია $m=0$ ნაწილაკის მოძრაობის მართობ სიბრტყეში. შეისწავლეთ თუ რა ხდება მცირე სიღრმის $\dfrac{ma^2U_0}{\hbar^2}<<1$ ორმოს შემთხვევაში.
მითითება: ამონახსნი ეძებეთ შემდეგი სახით $\Psi_{n_\rho m}=\chi_{n_\rho m}(\rho)e^{im\varphi}$.
4.49*. განიხილეთ ისევ წინა 4.48 ამოცანის შემთხვევა, ოღონდ აიღეთ $m\neq 0$. მიიღეთ დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობა.
მითითება: წინა 4.48 ამოცანის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაში გამოიყენეთ $J_m(x)$ და $K_m(x)$ ფუნქციებისათვის მცირე x ებისათვის ასიმპტოტური გაშლები.
4.50*·იპოვეთ დისკრეტული სპექტრის ენერგიის დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება შემდეგ ორგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში $U(\rho)=-\alpha\delta(\rho-a)$. განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც იმპულსის მომენტის პროექცია $m=0$ ნაწილაკის მოძრაობის მართობ სიბრტყეში. შეისწავლეთ მცირე $\dfrac{m\alpha a}{\hbar^2}<<1$ და ღრმა $\dfrac{m\alpha a}{\hbar^2}>>1$ორმოების შემთხვევები.
მითითება: ამოცანა იხსნება 4.48. ამოცანის ანალოგიურად.
4.51*.განიხილეთ ისევ წინა 4.50 ამოცანის შემთხვევა, ოღონდ აიღეთ $m\neq 0$. მიიღეთ დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობა.
მითითება: ამოცანა იხსნება 4.49 ამოცანის ანალოგიურად.

თავი 5. მდგომარეობის ცვლილება დროში.

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

კვანტურმექანიკური სისტემის ცვლილება დროში შეიძლება აღწერილ იქნეს სხვასხვა საშუალებებით.

შრედინგერის წარმოდგენაში ტალღური ფუნქცია (მდგომარეობის ვექტორი) დროში იცვლება შრედინგერის დროითი განტოლების შესაბამისად

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(q,t)=\hat{H}\Psi(q,t) \tag{5.1}$$

ხოლო დინამიური სიდიდეების ოპერატორები არ არიან დროზე დამოკიდებულნი. თუ ჰამილტონიანი ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე,სისტემის ტალღური ფუნქცია შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგი გაშლის სახით

$$\Psi(q,t)=\sum_n c(E_n)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}\Psi_{E_n}(q) \tag{5.2}$$

სადაც $\Psi_{E_n}(q)$ ფუნქციები ადგენენ სრულ სისტემას და წარმოადგენენ სტაციონალური მდგომარეობების ჰამილტონიანის საკუთარ ფუნქციებს. (5.2) გაშლაში $c(E_n)$ კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან დროის საწყისს მომენტში ტალღური ფუნქციის მნიშვნელობით

$$c(E_n)=\int\Psi^{\bullet}_{E_n}(q)\Psi(q,t=0) \tag{5.3}$$

ჰეიზენბერგის წარმოდგენაში პირიქით დროზე არის დამოკიდებული სისტემის ტალღური ფუნქცია, ხოლო დინამიური სიდიდეების ოპერატორების დროზე დამოკიდებულება განისაზღვრება შემდეგი განტოლებებით

$$\frac{d}{dt}\hat{q}_i(t)=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{q}_i(t)\right];\ \frac{d}{dt}\hat{p}_i(t)=\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},p_i(t)\right] \tag{5.4}$$

ამასთანავე $\hat{H}(\hat{q}(t),\hat{p}(t),t)$ ჰამილტონიანი გამოისახება ჰეიზენბერგის ოპერატორებით $\hat{q}(t)$ და $\hat{p}(t)$-თი, რომლებიც აკმაყოფილებენ კანონიკურ კომუტაციურ თანაფარდობებს

$$\left[\hat{p}_i(t),\hat{q}_k(t)\right]=-i\hbar\delta_{ik} \tag{5.5}$$

შრედინგერის და ჰეიზენბერგის თანაფარდობები უნიტარული გარდაქმნებით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული:

$$\Psi(q,t)=\hat{U}(t)\Psi_0(q) \tag{5.6}$$

თუ ჰამილტონიანი დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული, მაშინ $\hat{U}(t)=\exp\left\{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right\}$ და ოპერატორებს შორის თანაფარდობას შემდეგი სახე აქვს

$$\hat{f}_H(t)=e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}\hat{f}_{SH}e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \tag{5.7}$$

5.1. შრედინგერის დროითი განტოლების საშუალებით გამოთვალეთ A ფიზიკური სიდიდის საშუალოს დროით წარმოებული და დაამტკიცეთ, რომ

ა) $\frac{d\hat{A}}{dt}=\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{A}\right]$; ბ) $\frac{d}{dt}\langle A\rangle=\left\langle\frac{dA}{dt}\right\rangle$

5.2 დავამტკიცოთ შემდეგი ოპერატორული ტოლობები

ა) $\frac{d}{dt}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)=\frac{d\hat{A}}{dt}+\frac{d\hat{B}}{dt}$; ბ) $\frac{d}{dt}\left(\hat{A}\hat{B}\right)=\frac{d\hat{A}}{dt}\hat{B}+\hat{A}\frac{d\hat{B}}{dt}$

5.3 დავამტკიცოთ შემდეგი მოძრაობის განტოლებები ოპერატორული ფორმით

ა) $\frac{dx}{dt}=\frac{\hat{p}_x}{m}$; ბ) $\frac{d\hat{p}_x}{dt}=-\frac{\partial U}{\partial x}$

5.4.ერენფესტის თეორემის თანახმად, საშუალო მნიშვნელობანი მექანიკური სიდიდეებისა ემორჩილებიან კლასიკური მექანიკის კანონებს. დავამტკიცოთ, რომ ნაწილაკის $U(x)$ პოტენციალურ ველში მოძრაობისას სამართლიანია შემდეგი ტოლობები

ა) $\left\langle\frac{dx}{dt}\right\rangle=\frac{\langle p_x\rangle}{m}$; ბ) $\left\langle\frac{dp_x}{dt}\right\rangle=-\left\langle\frac{\partial U}{\partial x}\right\rangle$

5.5. დავამტკიცოთ, რომ ნაწილაკის $U(x)$ პოტენციალურ ველში მოძრაობისას სამართლიანია შემდეგი ოპერატორული ტოლობები

ა) $\frac{d}{dt}\left\langle x^2\right\rangle=\frac{1}{m}\left(x\hat{p}_x+\hat{p}_x x\right)$; ბ) $\frac{d}{dt}\left(x\hat{p}_x\right)=\frac{\hat{p}_x^2}{m}-x\frac{\partial U}{\partial x}$;

გ) $\frac{d}{dt}\left(\hat{p}_x^2\right)=-\left(\hat{p}_x\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial x}\hat{p}_x\right)$

5.6.ვიპოვოთ ნებისმიერ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული უსპინო ნაწილაკის $\hat{v}=\dot{\hat{r}}$ სიჩქარის ოპერატორი.

5.7.ვიპოვოთ ნებისმიერ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული უსპინო ნაწილაკის $\hat{w}=\dot{\hat{v}}$ აჩქარების ოპერატორი.

5.8.ვაჩვენოთ, რომ დროზე ცხადად დამოუკიდებელი ფიზიკური სიდიდის დროით წარმოებულის საშუალო მნიშვნელობა სტაციონალურ მდგომარეობაში ნულის ტოლია.

5.9*.ვაჩვენოთ, რომ დისკრეტულ სპექტრის სტაციონალურ მდგომარეობაში ნაწილაკზე მოქმედი ძალის საშუალო ნულის ტოლია.
მითითება: ამოცანა ამოხსენით 2 მეთოდით ა) გამოიყენეთ წინა 5.8 ამოცანის შედეგი. ბ) უშუალოდ გააწარმოეთ დროით ძალის ოპერატორი.

5.10. ვაჩვენოთ, რომ $\frac{d}{dt}\left(\hat{\vec{p}}\hat{\vec{r}}\right)$ ოპერატორის გასაშუალოებით (ისევე როგორც ეს ხდება კლასიკურ მექანიკაში) შეიძლება მივიღოთ ვირიალის თეორემა კვანტურ მექანიკაში.

5.11*. ვაჩვენოთ, რომ სივრცის შემოსაზღვრულ არეში N დამუხტული ნაწილაკის სისტემისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$\frac{2m}{e^2\hbar^2}\sum_m\left(E_m-E_n\right)\left|\left(d_i\right)_{nm}\right|^2=N\qquad\left(i=1,2,3\right)$$

სადაც $(d_i)_{nm}$ სისტემის დიპოლური მომენტის მატრიცული ელემენტებია, აჯამვა წარმოებს სისტემის ყველა სტაციონალური მდგომარეობებით, ხოლო m და e სისტემის თითოეული ნაწილაკის მასა და მუხტია.

მითითება: გამოიყენეთ დიპოლური ოპერატორის განმარტება $\hat{d}_i = e\sum_{a=1}^{N} x_{ai}$ და კომუტატიურობა $\hat{x}_{ai}$ კოორდინატისა და $\hat{\dot{x}}_{bk}$ სიჩქარის ოპერატორებისა სხვადასხვა ნაწილაკისთვის $(a \neq b)$.

5.12*. განვიხილოთ შრედინგერის განტოლება, რომელშიც პოტენციალური ენერგია კომპლექსური ფუნქციაა: $U(\bar{r}) = U_0(\bar{r}) + iU_1(\bar{r})$, სადაც U_0 და U_0 ნამდვილი ფუნქციებია. გამოარკვიეთ შეინახება თუ არა ასეთ ველში მოძრავი ნაწილაკის ტალღური ფუნქციის ნორმა. დროში ნორმის ცვლილება შეიძლება აიხსნას როგორც ნაწილაკების შთანთქმა ან გაჩენა გარეშე ველში. როგორ არის დაკავშირებული ამგვარ პროცესებთან პოტენციალის წარმოსახვითი ნაწილის ნიშანი?
მითითება: შრედინგერის განტოლებიდან მიიღეთ უწყვეტობის განტოლება, რომელიც შემდეგ აინტეგრეთ მთელი მოცულობით.

5.13*. ნაწილაკის სტაციონალური მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია საწყისს მომენტში არის

$$\Psi_n(x, t=0) = A\sin^3\frac{\pi x}{a}$$

იპოვეთ ტალღური ფუნქცია დროის ნებისმიერ მომენტში. რა T დროის შემდეგ დაუბრუნდება სისტემა საწყისს მდგომარეობას.
მითითება: გამოიყენეთ ტრიგონომეტრიული ფორმულა $\sin^3 z = \frac{3}{4}\sin z - \frac{1}{4}\sin 3z$

5.14. როგორ იცვლება დროში ბრტყელი როტატორის ტალღური ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ საწყისს მომენტში ის აღიწერება შემდეგი ტალღური ფუნქციით

$$\Psi(\varphi, t=0) = A\sin^2\varphi$$

რა T დროის შემდეგ დაუბრუნდება სისტემა საწყისს მდგომარეობას.

5.15. როგორ იცვლება დროში სივრცული როტატორის მდგომარეობა, თუ ცნობილია, რომ საწყისს მომენტში ის აღიწერება შემდეგი ტალღური ფუნქციით

$$\Psi(\varphi, t=0) = A\cos^2\vartheta$$

რა T დროის შემდეგ დაუბრუნდება სისტემა საწყისს მდგომარეობას.

5.16*.თავისუფალი ნაწილაკის მდგომარეობა საწყისს მომენტში ის აღიწერება შემდეგი ტალღური ფუნქციით

$$\Psi(x, t=0) = A\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{imv_0x}{\hbar}\right)$$

ვიპოვოთ ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია დროის ნებისმიერ მომენტში და შემდეგი საშუალოები $\langle x(t)\rangle, \langle p(t)\rangle$.

მითითება: $\Psi(x, t=0)$ ფუნქცია გაშალეთ იმპულსის ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებად.

5.17. თავისუფალი ნაწილაკის მდგომარეობა $t=0$ მომენტში აღიწერება ნორმირებული $\Psi_0(x)$ტალღური ფუნქციით (ამასთან ვიცით ტალღური ფუნქციის სახე $\Phi_0(p)$იმპულსურ წარმოდგენაში). ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევა $\Psi(x,t)$, როცა $t\to\infty$. დარწმუნდით, რომ ინახება ტალღური ფუნქციის ნორმა.

5.18. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\hat{f}_1$ და $\hat{f}_2$ სისტემის მოძრაობის ინტეგრალებია, მაშინ $\hat{g}_1 = \hat{f}_1\hat{f}_2 + \hat{f}_2\hat{f}_1$ და $\hat{g}_2 = i(\hat{f}_1\hat{f}_2 - \hat{f}_2\hat{f}_1)$ ოპერატორებიც მოძრაობის ინტეგრალებია.

5.19.ვაჩვენოთ, რომ ერთგვაროვან ველში $\hat{\vec{G}} = \hat{\vec{p}} - \vec{F}_0 t$ ოპერატორი შენახვადი სიდიდის შესაბამისი ოპერატორია. ($\vec{F}_0$ არის ძალა, რომელიც ნაწილაკზე მოქმედებს). შედეგი შეადარეთ კლასიკური მექანიკის შედეგს.

5.20. იპოვეთ ჰეიზენბერგის ოპერატორები კოორდინატისა და იმპულსისათვის თავისუფალი ნაწილაკისათვის.
მითითება. გამოიყენეთ ორი მეთოდი: ა)შრედინგერისა და ჰეიზენბერგის წარმოდგენების დამაკავშირებელი უნიტარული გარდაქმნა ბ) ამოხსენით ჰეიზენბერგის ოპრატორებისათვის მოძრაობის განტოლება.

5.21. იგივე, რაც წინა 5.20 ამოცანაში ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან ველში $U=-F_0 x$.

5.22. იგივე, რაც წინა 5.21 ამოცანაში წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორი.

5.23. გამოიყენეთ ჰეიზენბერგის ოპერატორები კოორდინატისა და იმპულსისათვის და წინა 5.20 - 5.22 ამოცანებში განხილული სისტემებისათვის იპოვეთ შემდეგი საშუალოები

$$\langle x(t)\rangle, \langle p(t)\rangle, \langle[\Delta x(t)]^2\rangle, \langle[\Delta p(t)]^2\rangle$$

სისტემების ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(x) = A\exp\left\{\frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}$$

5.24. ჰეიზენბერგის ოპრატორებისათვის მოძრაობის განტოლების გამოყენებით დავამტკიცოთ, რომ $[\hat{p}_i(t), \hat{x}_k(t)] = -i\hbar\delta_{ik}$

5.25. 5.20-5.22 ამოცანებში მითითებული სისტემებისათვის იპოვეთ "სხვადასხვა" დროიანი კომუტატორი $[\hat{p}(t), \hat{x}(t')]$

5.26.ნაწილაკი იმყოფება ერთგვაროვან დროში ცვალებად ველში, ამასთან ძალა $F(t)\to 0$, როცა $t\to\pm\infty$. იპოვეთ ძალის მოქმედების შედეგად ნაწილაკის საშუალო ენერგიის ცვლილება.

5.27.ვიპოვოთ უნიტარული ოპერატორი, რომელიც შეესაბამება გალილეის გარდაქმნას ანუ გადასვლას ახალ ინერციულ ათვლის სისტემაში. დარწმუნდით შრედინგერის განტოლების ინვარიანტობაში ამ გარდაქმნის მიმართ. როგორ გარდაიქმნება ამ დროს ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია კოორდინატულ და იმპულსურ წარმოდგენებში.

5.28. ვიპოვოთ უნიტარული ოპერატორი, რომელიც შეესაბამება ელექტრომაგნიტური ველების ყალიბრულ გარდაქმნას. დარწმუნდით შრედინგერის განტოლების ინვარიანტობაში ამ გარდაქმნის მიმართ.

5.29. დამუხტული ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, იპოვეთ ნაწილაკის რადიუს-ვექტორის და იმპულსის ოპერატორები ჰეიზენბერგის წარმოდგენაში. აირჩიეთ ვექტორული პოტენციალის შემდეგი ყალიბრობა $\vec{A}=(0,H_0x,0)$(მაგნიტური ველი მიმართულია z ღერძის გასწვრივ.
მითითება. გამოიყენეთ ორი მეთოდი: ა)შრედინგერისა და ჰეიზენბერგის წარმოდგენების დამაკავშირებელი უნიტარული გარდაქმნა ბ) ამოხსენით ჰეიზენბერგის ოპრატორებისათვის მოძრაობის განტოლება
5.30. 5.20-5.22 ამოცანებში განხილული სისტემებისათვის ვიპოვოთ ჰამილტონიანი $\hat{H}(t)$ და შეადარეთ ის $\hat{H}(t=0)$-ს.
5.31. რომელი მექანიკური სიდიდეები (ენერგია, იმპულსის პროექცია, იმპულსის მომენტის კვადრატი და პროექცია) ინახება ნაწილაკის შემდეგ ველებში მოძრაობისას:
ა) ველის არარსებობისას (თავისუფალი მოძრაობა)
ბ) ერთგვაროვანი პოტენციური ველი $U(z)=az$, სადაც a მუდმივია.
გ) ცენტრალურ –სიმეტრიული ველი $U(r)$.
დ) ერთგვაროვანი ცვლადი ველი $U(z,t)=a(t)z$
5.32. ნაწილაკი იმყოფება გარკვეულ $\Psi(x,t)$ მდგომარეობაში, რომელიც არ არის საკუთარი ფუნქცია $\hat{A}$ ოპერატორისა. $\hat{A}$ ოპერატორი ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე და კომუტირებს $\hat{H}$ ჰამილტონიანთან.ვაჩვენოთ, რომ
ა) ინახება A სიდიდის საშუალო.
ბ) A სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობების პოვნის ალბათობები არ არის დროზე დამოკიდებული.
5.33. როგორ შეიცვლება სტაციონალური მდგომარეობის აღმწერი სრული ტალღური ფუნქცია $\Psi(x,t)$, თუ შევცვლით პოტენციური ენერგიის ათვლის წერტილს გარკვეული ΔU სიდიდით.
5.34. ვიპოვოთ შრედინგერის დროითი განტოლების ამონახსნი თავისუფალი ნაწილაკისთვის, რომელიც მოძრაობს P იმპულსით X ღერძის დადებითი მიმართულებით.
5.35. ვიპოვოთ გაშლის კოეფიციენტები სრული ტალღური $\Psi(x,t)$ ფუნქციისა 2.7 ამოცანის ტალღურ ფუნციებად.
5.36*.m მასის ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(x,t)=Ae^{-a\left[\frac{mx^2}{\hbar}+it\right]}$$

სადაც A და a ნამდვილი დადებითი მუდმივებია.
ა) იპოვეთ A.
ბ) რომელი $V(x)$ პოტენციალისათვის $\Psi(x,t)$ ტალღური ფუნქცია აკმაყოფილებს შრედინგერის განტოლებას?
მითითება: გამოთვალეთ $\Psi(x,t)$-ის პირველი წარმოებული დროით და მეორე წარმოებული კოორდინატით და ჩასვით შრედინგერის დროით განტოლებაში.
5.37. m მასის ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(x,t)=Ae^{-a\left[\frac{mx^2}{\hbar}+it\right]}$$

იპოვეთ $\langle x\rangle$, $\langle x^2\rangle$, σ_x, $\langle p\rangle$, $\langle p^2\rangle$, σ_p.აკმაყოფილებს თუ არა ჰეიზენბერგის თანაფარდობას $\sigma_x\,\sigma_p$ ნამრავლი?

5.38*. ნორმირებული სტაციონალური მდგომარეობებისათვის დავამტკიცოთ, რომ E ნამდვილი სიდიდეა.

მითითება: $\Psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$ გამოსახულებაში ჩაწერეთ $E=E_0+i\Gamma$, (სადაც E_0 და Γ ნამდვილი რიცხვებია) და აჩვენეთ, რომ თუ სრულდება პირობა $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(x,t)|^2dx=1$ ყველა t-თვის, მაშინ აუცილებლად $\Gamma=0$.

5.39*. $t=0$ მომენტში 2.7 ამოცანის ტალღური ფუნქცია პირველი ორი სტაციონალური დონის სუპერპოზიციაა თანაბარი წონითი წვლილით

$$\Psi(x,0)=A[\psi_1(x)+\psi_2(x)]$$

ა) იპოვეთ A;

მითითება: გამოიყენეთ ψ_1 და ψ_2 ფუნქციების ორთოგონალობის პირობა

ბ) იპოვეთ $\Psi(x,t)$ და $|\Psi(x,t)|^2$. მოხერხებულობისათვის შემოიღეთ სიდიდე $\omega=\dfrac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$;

გ) გამოთვალეთ $\langle x\rangle$. ეს საშუალო დროში ოსცილირებს.იპოვეთ ამ ოსცილაციის სიხშირე და ამპლიტუდა;

დ) იპოვეთ $\langle p\rangle$;

ე) იპოვეთ $\langle H\rangle$

5.40*. წინა (5.39) ამოცანის ტალღური ფუნქციაში შემოვიტანოთ ფაზური ϕ მამრავლი

$$\Psi(x,0)=A\left[\psi_1(x)+e^{i\phi}\psi_2(x)\right]$$

იპოვეთ $\Psi(x,t)$, $|\Psi(x,t)|^2$ და $\langle x\rangle$. შეადარეთ შედეგები წინა ამოცანის შედეგებს. განიხილეთ $\phi=\dfrac{\pi}{2}$ და $\phi=\pi$ შემთხვევები.

5.41*.ნაწილაკის ყოფაქცევა ერთგანზომილებიან ორმოში $x\subset(0,a)$აღიწერება საწყისი ტალღური ფუნქციით $\Psi(x,0)=Ax(a-x)$, სადაც A მუდმივაა. იპოვეთ $\Psi(x,t)$.

მითითება: გამოიყენეთ 5.35 ამოცანის შედეგი $\Psi(x,t)$ის საპოვნელად.

5.42*. ჰარმონიული ოსცილატორის ტალღური ფუნქციაა

$$\psi(x,0)=A[\psi_0(x)+\psi_1(x)]$$

სადაც A მუდმივაა.

ა) იპოვეთ A მუდმივა.

ბ) იპოვეთ $\Psi(x,t)$ და $|\Psi(x,t)|^2$

გ) იპოვეთ $\langle x\rangle$როგორც დროის ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ ის ოსცილირებს. იპოვეთ ამ ოსცილაციის ამპლიტუდა და კუთხური სიხშირე.

დ) გამოიყენეთ გ) შედეგი და იპოვეთ $\langle p\rangle$. შეამოწმეთ, რომ ერენფესტის თეორემა ამ მდგომარეობისათვის სრულდება.

5.43*. განიხილეთ მოძრავი დელტა –ფუნქციანი კედელი

$$V(x,t)=-\alpha\delta(x-vt)$$

სადაც v არის კედლის მუდმივი სიჩქარე.

ა) აჩვენეთ, რომ დროზე დამოკიდებულ შრედინგერის განტოლებას აქვს ზუსტი ამონახსნი

$$\Psi(x,t)=\frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar}e^{-\frac{m\alpha|x-vt|}{\hbar^2}}e^{-i\frac{\left(E+\frac{1}{2}mv^2\right)t-mvx}{\hbar}}$$

სადაც $E=-\dfrac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$ არის ბმული მდგომარეობების ენერგია.

მითითება: პირდაპირი ჩასმით აჩვენეთ, რომ კმაყოფილდება შრედინგერის დროზე დამოკიდებული განტოლება.

ბ) იპოვეთ ჰამილტონიანის საშუალო $\langle H\rangle$ ამ მდგომარეობაში და გაანალიზეთ მიღებული შედეგი.

5.44*. ა) აჩვენეთ, რომ

$$\psi(x,t)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2+\frac{a^2}{2}\left(1+e^{-2i\omega t}\right)+\frac{i\hbar t}{m}-2axe^{-i\omega t}\right)\right]$$

ტალღური ფუნქცია აკმაყოფილებს დროზე დამოკიდებულ შრედინგერის განტოლებას ჰარმონიული ოსცილატორისათვის $V(x)=\dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$ პოტენციალით

აქ a ნამდვილი მუდმივაა.

ბ) იპოვეთ $|\psi(x,t)|^2$

გ) დათვალეთ $\langle x\rangle$ და $\langle p\rangle$ და შეამოწმეთ, რომ კმაყოფილდება ერენფესტის თეორემა.

თავი 6. კვანტურ-მექანიკური ამოცანების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები.

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

შეშფოთების თეორიის მეთოდები დაფუძნებულია ჰამილტონინის შემდეგი სახით წარმოდგენაზე

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \tag{6.1}$$

სადაც $\hat{V}$ შეშფოთება მცირე შესწორებაა და იგულისხმება, რომ $\hat{H}_0$ შეუშფოთებელი ჰამილტონიანით ცნობილია შრედინგერის განტოლების ამოხსნები. ეს მეთოდები საშუალებას იძლევიან თანმიმდევრული იტერაციების საშუალებით განვიხილოთ ის ეფექტები, რასაც იწვევს შეშფოთების ზემოქმედება.

1) სტაციონალურ შემთხვევაში, როდესაც $\hat{H}_0$ და $\hat{V}$ ანუ $\hat{H}$ არ არიან დროზე დამოკიდებული, მაშინ $\hat{H}$ ჰამილტონიანის დისკრეტული სპექტრის საკუთარი მნიშვნელობანი და შესაბამისი საკუთარი ფუნქციები შემდეგი შეშფოთების მწკრივის სახით წარმოიდგინება

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \ldots \tag{6.2}$$

$$\Psi_n = \sum_m c_{nm}\Psi_m^{(0)}; \qquad c_{nm} = c_{nm}^{(0)} + c_{nm}^{(1)} + \ldots \tag{6.3}$$

სადაც $E_n^{(0)}$ და $\Psi_n^{(0)}$ სპექტრი და საკუთარი ფუნქციებია $\hat{H}_0$ შეუშფოთებელი ჰამილტონიანის. მაშინ თუ შეუშქაფოთებელი $E_n^{(0)}$ დონეები გადაუგვარებელია, გვექნება

$$E_n^{(1)} = \left\langle \Psi_n^{(0)} \middle| \hat{V} \middle| \Psi_n^{(0)} \right\rangle \equiv \left\langle n \middle| \hat{V} \middle| n \right\rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum_m \frac{\left|\left\langle m \middle| \hat{V} \middle| n \right\rangle\right|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \tag{6.4}$$

(ამ ჯამში არ გვაქვს $m = n$ შესაკრები), ხოლო საკუთარი ფუნქციებისათვის

$$c_{nk}^{(0)} = \delta_{nk}; \; c_{nn}^{(1)} = 0; \; c_{nk}^{(1)} = \frac{\left\langle k \middle| \hat{V} \middle| n \right\rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \; k \neq n \tag{6.5}$$

შეშფოთების თეორიის გამოყენების კრიტერიუმია $(n \neq k)$:

$$\left|\left\langle k \middle| \hat{V} \middle| n \right\rangle\right| << \left| E_n^{(0)} - E_k^{(0)} \right| \tag{6.6}$$

თუ შეუშფოთებელი $E_n^{(0)}$ დონე s ჯერადად გადაგვარებელია და მას შეესაბამება ურთიერთორთოგონალური საკუთარი ფუნქციები $\Psi_{n,\alpha}^{(0)}$, სადაც $\alpha = 1,2,\ldots s$, მაშინ ნულოვანი მიახლოების სწორი საკუთარი ფუნქციებია

$$\Psi_n = \sum_\alpha c_\alpha^{(0)} \Psi_{n,\alpha}^{(0)} \tag{6.7}$$

და შესაბამისი ენერგიის პირველი რიგის $E_n^{(1)}$ შესწორებები განისაზღვრებიან შემდეგი განტოლებათა სისტემიდან

$$\sum_{\beta}\left(\left\langle n\alpha\left|\hat{\mathrm{V}}\right|\mathrm{n}\beta\right\rangle - E_n^{(1)}\delta_{\alpha\beta}\right)c_{\beta}^{(0)} = 0 \qquad (6.8)$$

(6.8) სისტემის არატრივიალური ამოხსნადობის მოთხოვნიდან ვღებულობთ სეკულარულ განტოლებას

$$\left|\left\langle n\alpha\left|\hat{V}\right|n\beta\right\rangle - E_n^{(1)}\delta_{\alpha\beta}\right| = 0 \qquad (6.9)$$

რომლის $E_n^{(1)}$ ფესვები (მათი რიცხვი არის s) განსაზღრავენ $\hat{H}_0$ შეუშფოთებელი ჰამილტონიანის დონეების გახლეჩას (თუ ყველა $E_n^{(1)}$ ფესვი განსხვავებულია, მაშინ გადაგვარება მთლიანად იხსნება, ჯერადი ფესვების არსებობისას კი გადაგვარება ნაწილობრივ იხსნება) და ამ ფესვების (6.8) სისტემაში ჩასმა საშუალებას იძლევა ვიპოვოთ ნულოვან მიახლოებაში შესაბამისი ქვედონეების ტალღური ფუნქციები.

2) რიგ შემთხვევებში გამოიყენება ვარიაციული მეთოდი ენერგიის დონეების დასათვლელად. ამ მეთოდის საფუძველს წარმოადგენს შემდეგი უტოლობა

$$E_0 \leq \int \psi^{\bullet}\hat{H}\psi dq \qquad (6.10)$$

სადაც E_0 ძირითადი მდგომარეობის ენერგიაა (ანუ იმ მდგომარეობისა, რომლის ენერგიაც მინიმალურია), $\hat{H}$ ჰამილტონის ოპერატორია, ხოლო ψ ნებისმიერი ნორმირებული ფუნქციაა, რომელთაც საცდელი ფუნქციები ეწოდებათ. ვარიაციული მეთოდით ამოცანა შემდეგნაირად იხსნება:

ა) ირჩევენ ნორმირებულ საცდელ ψ ფუნქციებს, რომლებიც გარკვეულ α, β და ა.შ. პარამეტრებზეა დამოკიდებული.

ბ) ითვლიან ფუნქციონალს $J(\alpha,\beta,...) = \int \psi^{\bullet}\hat{H}\psi dq$, რომელიც იმავე პარამეტრებზეა დამოკიდებული

გ) პოულობენ α, β და ა.შ. პარამეტრების იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც J მინიმუმს აღწევს,რისთვისაც აუცილებელია განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial J}{\partial \beta} = 0,... \qquad (6.11)$$

საცდელი ფუნქციის წარმატებით შერჩევისას ენერგიის მიღებული მნიშვნელობა

$$E_0 = J(\alpha_0, \beta_0,...) \qquad (6.12)$$

ახლოს იქნება ენერგიის ნამდვილ მნიშვნელობასთან გამოყენებული პარამეტრების მცირე რაოდენობისთვისაც კი.

ვარიაციული მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იქნას არ ზნებული მდგომარეობებისთვისაც. ასე მაგალითად, პირველი აღგზნებული დონის საპოვნელად ნაპოვნი უნდა იქნეს შემდეგი ფუნქციონალის მინიმუმი

$$J_1 = \int \psi_1^{\bullet}\hat{H}\psi_1 dq \qquad (6.13)$$

სადაც ψ_1 ნორმირებული ფუნქციაა, რომელიც ორთოგონალურია ძირითადი მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციასთან. ასევე შეიძლება იქნას ნაპოვნი უფრო მაღალი აღგზნების ტალღური ფუნქციები.

აუცილებელია აღინიშნოს, რომ ენერგიის ზუსტი მნიშვნელობები $E_n^{(0)}$და ვარიაციული მეთოდით მიღებული E_n მნიშვნელობები შემდეგ უტოლობას აკმაყოფილებენ

$$E_n^{(0)} \le E_n \tag{6.14}$$

ვარიაციული მეთოდით ნაპოვნი ტალღური ფუნქციებიშეიძლება არ იყვნენ $\hat{H}$ ჰამილტონის ოპერატორის საკუთარი ფუნციები. ისინი საკუთარი ფუნქციები მხოლოდ მაშინ გახდებიან, თუ პარამეტრების წარმატებული არჩევისას ვარიაციული მეთოდით ვღებულობთ ზუსტ ამონახსნებს. ამ შემთხვევაში (6.14) თანაფარდობაში გვექნება ტოლობა.

3) დროზე დამოკიდებული $\hat{V}(t)$შეშფოთების შემთხვევაში შრედინგერის დროზე დამოკიდებული განტოლების

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \left(\hat{H}_0 + \hat{V}(t)\right)\Psi \tag{6.15}$$

ტალღური ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\Psi(t) = \sum_k a_k(t) \exp\left\{-\frac{iE_k^{(0)}t}{\hbar}\right\}\Psi_k^{(0)}(q) \tag{6.16}$$

რომელშიც $a_k(t)$კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ სისტემას

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) \exp\{i\omega_{mk}t\} a_k \tag{6.17}$$

სადაც

$$V_{mk}(t) = \int \Psi_m^{(0)*}(q)\hat{V}(t)\Psi_k^{(0)}(q)d\tau_q; \quad \omega_{mk} = \frac{E_m^{(0)} - E_k^{(0)}}{\hbar} \tag{6.18}$$

(6.17) სისტემის ამოხსნა თანმიმდევრული იტერაციებით

$$a_k(t) = a_k^{(0)}(t) + a_k^{(1)}(t) + \dots \tag{6.19}$$

იძლევა $a_k^{(0)}(t) = const$. შემდგომ თუ ჩავთვლით, რომ $\hat{V}(t) \to 0$, როცა $t \to -\infty$ და ამ დროს (ანუ შეშფოთების ჩართვამდე) სისტემა იმყოფება დისკრეტული სპექტრის $\Psi_q^{(0)}$მე -n მდგომარეობაში და ამიტომ $a_k(t \to -\infty) \to \delta_{nk}$, ვირჩევთ $a_k^{(0)} \equiv a_{kn}^{(0)} = \delta_{nk}$. პირველი რიგის შესწორებისათვის $a_{kn}^{(1)}(t = -\infty) = 0$ პირობის გათვალისწინებით (6.17) სისტემიდან ვღებულობთ

$$a_{kn}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt \tag{6.20}$$

თუ $t \to \infty$–თვის $\hat{V}(t)$ შეშფოთება ქრება, მაშინ $a_{kn}^{(1)}(t = \infty)$ შეშფოთების პირველ რიგში განსაზღრავს იმის ალბათობას, რომ სისტემა საწყისი მე-n მდგომარეობიდან გადავიდეს საბოლოო k-ურ $(k \ne n)$ მდგომარეობაში მისი მთელი მოქმედების მანძილზე:

$$W^{(1)}(n \to k) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt\right|^2 \tag{6.21}$$

6.1 შეშფოთების სტაციონალური თეორია

6.1. ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში, შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში ვიპოვოთ ენერგიის წანაცვლება შემდეგი შეშფოთებებისას

$$\text{ა)}\ V(x) = \frac{V_0}{a}\left(a - |2x - a|\right)$$

$$\text{ბ)}\ V(x) = \begin{cases} V_0,\ b < x < a - b \\ 0,\ \ 0 < x < b,\ a - b < x < a \end{cases}$$

შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის

6.2. ვაჩვენოთ, რომ წინა 6.1. ამოცანის ნაწილაკის ენერგეტიკული დონეების პირველი რიგის $E^{(1)}$ შესწორება ნებისმიერი $V(x)$ შეშფოთებისას საკმარისად ზედა დონეებისთვის (დიდი n-სთვის), არ არის დამოკიდებული n-ზე.

6.3. დამუხტული წრფივი ოსცილატორი მოთავსებულია ერთგვაროვან ელეტრულ ველში, რომლის $\vec{\varepsilon}$ დაძაბულობის ვექტორი მიმართულია ოსცილატორის რხევის ღერძის გასწვრივ. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება. მიღებული შედეგი შეადარეთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს.

6.4. დამუხტული ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში ერთგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში და მასზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელეტრული ველი. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება.

6.5. ოსცილატორის ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^2}{2}$$

განიხილეთ $\frac{\alpha x^2}{2}$ წევრი, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება. შეისწავლეთ მიღებული შეშფოთების მწკრივის კრებადობის საკითხი.

6.6. ნაწილაკზე, რომელიც იმყოფება a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში, მოდებულია შემდეგი შეშფოთება

$$V(x) = V_0 \cos^2 \frac{\pi x}{a}$$

იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება.

6.7. წინა 6.6 ამოცანაში იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ნაწილაკის ძირითადი ენერგეტიკული დონის მესამე რიგის შესწორება.

6.8. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება 6.1 ამოცანის პირობებში, როდესაც შეშფოთებას შემდეგი სახე აქვს:

$$V(x)=\alpha\delta(x-a/2)$$

შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის.

6.9. როგორც ცნობილია, შეშფოთების თეორიის ფარგლებში პირველი რიგის შესწორებას შემდეგი სახე აქვს

$$\Psi_n \approx \Psi_n + \sum_k c_{nk}^{(1)}\Psi_k^{(0)};\ c_{nk}^{(0)} = \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}};\ k \neq n$$

ხოლო $c_{nn}^{(1)}$ კოეფიციენტების მნიშვნელობები განუსაზღრელი რჩება. (როგორც წესი თვლიან, რომ $c_{nn}^{(1)}=0$). ახსენით თუ რატომ წარმოიშვება ეს განუზღვრელობა. შენარჩუნდება თუ არა ეს განუზღვრელობა $c_{nn}^{(p)}$-ების დათვლისას შეშფოთების თეორიის უფრო მაღალ რიგებში?

6.10. I ინერციის მომენტის და $\vec{d}$ ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორი იმყოფება ერთგვაროვან ელექტრულ ველში, რომლის $\vec{\varepsilon}_0$ დაძაბულობის ვექტორი მოთავსებულია როტატორის ბრუნვის სიბრტყეში. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ როტატორის ძირითადი მდგომარეობის პოლარიზაცია.

6.11. I ინერციის მომენტის და $\vec{d}$ ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე სივრცული როტატორი ($\vec{d}$ პარალელურია როტატორის ღერძის) მოთავსებულია $\vec{\varepsilon}_0$ დაძაბულობის მქონე ერთგვაროვან ელექტრულ ველში. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ როტატორის ძირითადი მდგომარეობის პოლარიზაცია.

6.12. ვიპოვოთ ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის პირველი აღგზნებული დონის გახლეჩა $V=\alpha xy$ (x,y სიბრტყეში ხდება რხევა) შეშფოთების ზემოქმედების გამო შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში.

6.13. ვიპოვოთ ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის მეორე აღგზნებული დონის გახლეჩა $V=\alpha xy$ (x,y სიბრტყეში ხდება რხევა) შეშფოთების ზემოქმედების გამო შეშფოთების თეორიის პირველი რიგში.

6.14*. დამუხტული ნაწილაკი მოძრაობს ერთგანზომილებიან $U=-\alpha\delta(x)$ პოტენციალურ ველში. ვიპოვოთ ენერგიის გახლეჩა სუსტ ელექტრულ ველში და ძირითადი დონის პოლარიზაცია.

მითითება: გამოიყენეთ შემდეგი ინტეგრალი $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\sin kx e^{-\eta|x|}dx = \dfrac{4\eta k}{\left(x^2+k^2\right)^2}$

და დამატების **(A.10)** ინტეგრალი.

6.15*.. I ინერციის მომენტის და $\vec{d}$ ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორი იმყოფება ძლიერ ელექტრულ ველში $\left(d\varepsilon >> \dfrac{\hbar^2}{I}\right)$. ვიპოვოთ როტატორის სპექტრის ქვედა ნაწილის ენერგეტიკული დონეებისა და ტალღური ფუნქციების მიახლოებითი სახე.

მითითება: ძლიერ ელექტრულ ველში როტატორის ქვედა დონეები ლოკალიზებულია მცირე კუთხეებზე $|\varphi| << 1$.ამიტომ $U = -d\varepsilon\cos\varphi$ ენერგია გაშალეთ მწკრივად φ-ს მიხედვით და შემიოფარგლეთ გაშლის φ^2 წევრით.

6.16*.I ინერციის მომენტის და $\vec{d}$ ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე სივრცული როტატორი იმყოფება ძლიერ ელექტრულ ველში $\left(d\varepsilon >> \frac{\hbar^2}{I}\right)$. ვიპოვოთ როტატორის სპექტრის ქვედა ნაწილის ენერგეტიკული დონეებისა და ტალღური ფუნქციების შესწორებები შეშფოთების თეორიის პირველი რიგში.

მითითება: ამოცანა იხსნება 6.15 ამოცანის ანალოგიურად.

6.17*. ნაწილაკი იმყოფება შეუღწევადი ბრუნვის ელიფსოიდის შიგნით, რომლის პოტენციალია

$$U(x,y,z) = \begin{cases} 0, \ \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} < 1, \\ \infty, \ \dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} > 1 \end{cases}$$

ამასთან $|a-b| << a$. ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის პირველი რიგში ნაწილაკის ძირითადი ენერგიის დონის შესწორება. შეუშფოთებელ ობიექტად ჩათვალეთ ელიფსოიდის მოცულობის სფერო.

მითითება: შემოიღეთ ახალი ცვლადები $x' = x, y' = y, z' = \frac{az}{b}$ და შესშფოთების ოპერატორად განიხილეთ შემდეგი ოპერატორი $\hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(2\varepsilon + \varepsilon^2\right)\frac{\partial^2}{\partial z'^2}$, სადაც $|\varepsilon| << 1$ განისაზღვრება $a = (1+\varepsilon)b$ თანაფარდობიდან.

6.18*. ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ ცენტრალურ ველში

$$U(r) = -\frac{U_0}{e^{\frac{r}{a}} - 1}$$

ამასთან $\frac{ma^2U_0}{\hbar^2} >> 1$.შეშფოთების თეორიის პირველი რიგში ვიპოვოთ განსხვავება ამოცანის ენერგეტიკული სპექტრი ქვედა ნაწილისა კულონური $\widehat{U}(r) = -\frac{U_0 a}{r}$ პოტენციალის სპექტრისაგან.

მითითება:შეშფოთების ოპერატორად აიღეთ $V(r) = -U_0\left[\frac{1}{\exp(r/a) - 1} - \frac{a}{r}\right]$ ოპერატორი და შემდეგ ეს ოპერატორი გაშალეთ r/a ხარისხების მწკრივად პირველ რიგამდე.

6.19*. ნაწილაკი იმყოფება იუკავას პოტენციალის ველში

$$U(r) = -\frac{\alpha e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

ამასთან $\frac{ma\alpha U_0}{\hbar^2} >> 1$.შეშფოთების თეორიის პირველი რიგში ვიპოვოთ განსხვავება ამოცანის ენერგეტიკული სპექტრი ქვედა ნაწილისა კულონური $\widehat{U}(r) = -\frac{U_0 a}{r}$ პოტენციალის სპექტრისაგან.

მითითება: ამოცანა იხსნება 6.18 ამოცანის ანალოგიურად.

6.20*. ნაწილაკისათვის რომელიც მოძრაობს შემდეგ ცენტრალურ ველში

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^p};\ 0 < p < 2;\ \alpha > 0$$

ვიპოვოთ $E_{n_r l}$ ენერგეტიკული დონეები დიდი $l >> 1$ ორბიტალური მომენტისათვის. (ამასთან n_r რადიალური რიცხვი შესაძლოა არც ისე დიდი იყოს). შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის. კულონური ველისათვის $(p = 1)$ მიღებული შედეგი შეადარეთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს.

მითითება: გაშალეთ ეფექტური პოტენციალი $U_{eff} = -\frac{\alpha}{r^p} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$ მინიმუმის წერტილის r_0-ის მახლობლად

6.21. ნაწილაკისათვის რომელიც მოძრაობს შემდეგ ცენტრალურ ველში

$$U(r) = \alpha r^\nu;\ \alpha, \nu > 0$$

ვიპოვოთ $E_{n_r l} > 0$ ენერგეტიკული დონეები დიდი $l >> 1$ ორბიტალური მომენტისათვის. (ამასთან n_r რადიალური რიცხვი შესაძლოა არც ისე დიდი იყოს). შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის. სფერული ოსცილატორისათვის $(\nu = 2)$ მიღებული შედეგი შეადარეთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს.

მითითება: ამოცანა იხსნება 6.20 ამოცანის ანალოგიურად.

6.22.ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის $\psi_n^{(2)}$ მეორე რიგის შესწორება ტალღური ფუნქციისათვის.

6.23.ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის $E_n^{(2)}$ მესამე რიგის შესწორება ენერგიის დონისათვის.

6.24.ვიპოვოთ ენერგიის დონეები წრფივი ანჰარმონიული ოსცილატორისათვის, რომლის ჰამილტონიანია

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4$$

6.25. ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობისათვის და ნულოვანი რიგის სწორი ფუნქციები ორჯერადად გადაგვარებული დონისათვის.

6.26. ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის მეორე რიგის შესწორება ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობისათვის ორჯერადად გადაგვარებული დონისათვის.

6.27.ნაწილაკი იმყოფება სფერული სიმეტრიის ველში (შეუშფოთებელი ამოცანა) და მისი ენერგიის დონეებია E_{nl}. იპოვოთ შეშფოთების თეორიის პირველი რიგში ენერგიის შესწორება როდესაც ერთვება OZ გასწვრივ მიმართული სუსტი მაგნიტური ველი.

6.28. აჩვენეთ, რომ ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის მეორე რიგის შესწორება ყოველთვის უარყოფითი სიდიდეა
6.29. სისტემის შეშფოთება იმაში მდგომარეობს, რომ ერთგანზომილებიანი a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალური ორმოს ფსკერი V_0 მუდმივათი აიწია მხოლოდ $x \in (0, a/2)$ ინტერვალში. ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის პირველი შესწორებები ენერგიასა და ტალღურ ფუნქციაში.
6.30. ვიპოვოთ ენერგიის პირველი შესწორება ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს x_0 სიგანის და უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციალურ ორმოში, თუ შეშფოთების ენერგიას აქვს სახე

$$\hat{V} = -C \quad \text{როცა} \quad 0 \le x \le x_0/2$$

$$\hat{V} = C \quad \text{როცა} \quad x_0/2 < x \le x_0$$

სადაც C მუდმივია.
6.31. განვიხილოთ კვანტური ქანქარა, რომლის ჰამილტონიანია

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \lambda\cos\varphi$$

სადაც პოტენციალური ენერგია $V = -\lambda\cos\varphi$, განიხილება როგორც შეშფოთება. ვიპოვოთ ამ სისტემისთვის შეშფოთების თეორიის პირველი და მეორე რიგის შესწორებები ენერგიისათვის
6.32. ერთგანზომილებიანი a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალური ორმო მოთავსებულ ნაწილაკზე მოქმედებს შეშფოთება $V = -qx$. ვიპოვოთ შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორებები ენერგიასა და ტალღურ ფუნქციაში.
6.33. $|V_{mn}| << \left|E_n^{(0)} - E_m^{(0)}\right|$ თანაფარდობა წარმოადგენს შეშფოთების თეორიის გამოყენების აუცილებელ პირობას. როგორც მაგალითი აჩვენეთ, რომ $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \lambda x^3$ ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის ეს პირობა არ არის საკმარისი.
6.34.შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში ვიპოვოთ ენერგიის ცვლილება, რაც იმით არის გამოწვეული, რომ წყალბადის ატომში ერთით პროტონით იზრდება ბირთვის მუხტი.
6.35*.როგორ შეიცვლება წყალბადის ატომის პირველი აგზნებული დონის ენერგია, თუ პროტონს განვიხილავთ არა როგორც წერტილს, არამედ ჩავთვლით მას მცირე $b = 5 \cdot 10^{-13}$ სმ რადიუსის მქონე თანაბრად დამუხტულ სფეროდ.
მითითება: შეშფოთების ოპერატორად განიხილეთ ოპერატორი:

$$\hat{V}(r) = \begin{cases} e^2\left(1/r - 3/2b + r^2/2b^3\right), & r < b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

სადაც $b << a$ (a ბორის რადიუსია).
6.36. ნაწილაკი იმყოფება ორგანზომილებიან სიმეტრიულ უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. ამასთანავე ნაწილაკი მოქმედებს მცირე შეშფოთებაც $W = Cxy$, სადაც C მუდმივაა. ვიპოვოთ ენერგიის შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება

6.37*.ნაწილაკის ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს

$$H = \begin{cases} \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{m\omega^2 r^2}{2}; \ 0 \le r \le a \\ \dfrac{p^2}{2m}; \qquad\qquad r > a \end{cases}$$

სადაც $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. იპოვეთ ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის შეშფოთების თეორიის პირველი და მეორე რიგის შესწორებები.
მითითება: შეშფოთების ოპერატორად განიხილეთ ოპერატორი:

$$V = \begin{cases} 0; \qquad\qquad 0 \le r \le a \\ -m\omega^2 r^2/2: \ r > a \end{cases}$$

6.38. m მასის და $E = \dfrac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$ ენერგიის მქონე ნაწილაკი იმყოფება სამგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. მასზე z მიმართულებით მოქმედებს სუსტი ელექტრული ველი $W = e\varepsilon z$. ვიპოვოთ ენერგიის შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება

6.2 ვარიაციული მეთოდი

6.39.ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ნაწილაკის ძირითადი ენერგია, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ველში

$$U(x) = \begin{cases} F_0 x; \ \ x \ge 0 \\ \infty; \quad\ x < 0 \end{cases}$$

საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა) $\Psi = Axe^{-\alpha x}$; ბ) $\Psi = Bxe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$
6.40. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ველში

$$U(x) = -\alpha\delta(x)$$

საცდელ ფუნქციად აიღეთ: ა) $\Psi(x) = A\left(1 + \dfrac{x^2}{a^2}\right)^{-1}$; ბ) $\Psi(x) = B\left(1 + \dfrac{x^2}{a^2}\right)^{-2}$

სადაც a ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შევადაროთ ზუსტ ამონახსნს.
6.41. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ნაწილაკის პირველი აგზნებული დონის ენერგია, რომელიც მოძრაობს წრფივი ოსცილატორის ველში. საცდელ ფუნქციად აიღეთ: $\Psi = Axe^{-\alpha|x|}$, სადაც α ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შევადაროთ ზუსტ ამონახსნს.
6.42.ვიპოვოთ ერთგანზომილებიანი უსასრულო სიმაღლის და a სიგანის პოტენციალურ ორმოში მოძრავი ნაწილაკის ძირითადი დონის ენერგია. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ ა) $\Psi(x) = Ax(x-a)$; ბ) $\Psi(x) = \sin^2\dfrac{\pi x}{a}$; გ) $\Psi(x) = C\left(\dfrac{a}{2} - \left|x - \dfrac{a}{2}\right|\right)$. შედეგი შეადარეთ ზუსტ შედეგს. ახსენით ყველაზე კარგ თანხვედრას რატომ იძლევა ა) ფუნქცია.
6.43.ვიპოვოთ ერთგანზომილებიანი უსასრულო სიმაღლის და a სიგანის პოტენციალურ ორმოში მოძრავი ნაწილაკის პირველი

აგზნებული დონის ენერგიები. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ $\Psi = Bx(a/2 - x)(a - x)$. შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.44*. ერთნაირი m მასის ორი ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის და a სიგანის პოტენციალურ ორმოში და ერთმანეთთან ურთიერთქმედებენ, როგორც ორი შეუღწევადი ჭერტილი ანუ $\Psi(x_1, x_2) = 0$, როცა $x_1 = x_2$. ვიპოვოთ ძირითადი დონის ენერგია. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ უმარტივესი პოლინომები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობებს

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\Psi = Ax(x_1 - x_2)(a - x_2)$, $0 \le x_1 \le x_2 \le a$

6.45*ვარიაციული მეთოდის საშუალებით (საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\Psi(r) = Ce^{-\beta r}$; $\beta > 0$ ვარიაციული პარამეტრია) მიიღეთ ცენტრალურ $U(r)$ ველში (ამასთან $U(r) \to 0$ როცა $r \to \infty$) ბმული დონის არსებობის საკმარისი პირობა.

მითითება: დათვალეთ ენერგიის საშუალო მნიშვნელობა და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ძირითადი დონის ენერგია ნაკლებია ან უდრის საშუალო მნიშვნელობას.

6.46*.ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით ვიპოვოთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის მიახლოებითი მნიშვნელობა. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა) $\Psi(x) = A\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1}$; ბ) $\Psi(x) = B\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-2}$, სადაც a ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შევადაროთ ზუსტ ამონახსნს.

მითითება: ინტეგრალების გამოთვლებისას გამოიყენეთ დამატების **(A.10)** ფორმულა

6.47. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგ ველში

$$U(x) = \begin{cases} kx, \ x > 0; \ k > 0 \\ \infty, \ x < 0 \end{cases}$$

ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით ვიპოვოთ ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა) $\Psi(x) = Axe^{-\alpha x}$; ბ) $\Psi(x) = Bxe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$, სადაც α ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შევადაროთ ზუსტ ამონახსნს.

6.48. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგ ველში

$$U_0(x) = \begin{cases} \infty; \ x < 0 \\ -\alpha\delta(x - a); \ x > 0 \end{cases}$$

ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც ამ პოტენციალს გააჩნია ბმული მდგომარეობები. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ $(x > 0)$: ა) $\Psi(x) = Axe^{-\eta x}$; ბ) $\Psi(x) = Bxe^{-\frac{\eta x^2}{2}}$. შედეგი შევადაროთ ზუსტ ამონახსნს.

6.49. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ორგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ a სიგანის ორმოში მოძრავი ნაწილაკის ძირითადი დონის ენერგია.საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა) $\Psi_0(\rho) = A(a-\rho)$ ბ) $\Psi_0(\rho) = B\cos\frac{\pi\rho}{2a}$. შედეგი შევადაროთ ზუსტ ამონახსნს.

6.50. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ორგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ a სიგანის ორმოში მოძრავი ნაწილაკის პირველი აგზნებული $E_{n_\rho=0,|m|=1}$ დონის ენერგია . საცდელ რადიალურ ფუნქციებად აიღეთ მეორე რიგის პოლინომი, რომელიც $\rho = 0$ და $\rho = a$ წერტილებში აკმაყოფილებს აუცილებელ სასაზღვრო პირობებს.

6.51. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ორგანზომილებიანი ბრტყელი ოსცილატორის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\Psi_0(\rho) = Ce^{-\alpha\rho}$, სადაც α ვარიაციული პარამეტრია.

6.52. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია კულონურ $U = -\alpha/r$ ველში. საცდელ ფუნქციად აიღეთ ა) $\Psi_0(\rho) = Ce^{-\alpha^2 r^2}$ ბ) $\Psi(r) = \begin{cases} C(a-r), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$, სადაც α და a ვარიაციული პარამეტრებია

6.53*. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ წყალბადის ატომის მიახლოებითი ენერგია და ტალღური ფუნქციები $2s$ მდგომარეობაში.

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\psi_{2s} = A\left(1+\frac{\gamma r}{a}\right)e^{-\frac{b}{a}r}$, სადაც a ბორის პირველი რადიუსია, A ნორმირების მუდმივაა, ხოლო b და γ ვარიაციული პარამეტრებია.

6.54. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია ოსცილატორისათვის $U = \frac{kr^2}{2}$.საცდელ ფუნქციად აიღეთ ა) $\Psi_0(\rho) = Ce^{-\alpha r}$ ბ) $\Psi(r) = \begin{cases} C(a-r), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$, სადაც α და a ვარიაციული პარამეტრებია.

6.55. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით ვიპოვოთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია სამგანზომილებიანი ოსცილატორისათვის.საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\varphi = A(1+\alpha r)e^{-\alpha r}$ სადაც α და A ვარიაციული პარამეტრებია.

6.56*.განიხილეთ ერთგანზომილებიანი მიზიდვის პოტენციალი, ისეთი რომ $V(x) < 0$ ყველა x-თვის. ვარიაციული პრინციპის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ამ პოტენციალს გააჩნია მინიმუმ ერთი დონე.

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\psi = \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}}e^{-ax^2}$

6.57*. განიხილეთ ნაწილაკი, რომელიც მოძრაობს ერთგანზომილებიან $V(x) = \lambda x^4$ ველში. გამოიყენეთ ვარიაციული მეთოდი და იპოვეთ

ძირითადი მდგომარეობის ენერგია.შეადარეთ შედეგი ზუსტ ამონახსნს $E_0 = 1{,}06\dfrac{\hbar^2}{2m}k^{\frac{1}{3}}$, სადაც $k = \dfrac{2m\lambda}{\hbar^2}$.

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\psi = \left(\dfrac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2}$

6.58. დავამტკიცოთ ვარიაციული პრინციპის შემდეგი დებულება: თუ $\langle \psi \| \psi_g \rangle = 0$, მაშინ $\langle H \rangle \geq E_f$, სადაც E_f არის პირველი აღგზნებული დონის ენერგია.

6.59. გამოიყენეთ ვარიაციული პრინციპი იმის დასამტკიცებლად, რომ პირველი რიგის შესწორება (არაგადაგვარებული სპექტრის შემთხვევაში) შეშთოთების თეორიაში, მეტია ან ტოლი ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის.

6.60. გამოიყენეთ ვარიაციული პრინციპი იმის დასამტკიცებლად, რომ მეორე რიგის შესწორება (არაგადაგვარებული სპექტრის შემთხვევაში) შეშთოთების თეორიაში, ნაკლები ან ტოლია ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის.

6.61*. თუ ფოტონს გააჩნია არანულოვანი მასა $(m_\gamma \neq 0)$, მაშინ კულონური პოტენციალს ცვლის იუკავას პოტენციალი

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

სადაც $\mu = m_\gamma c/\hbar$. ვარიაციული პრინციპის გამოყენებით იპოვეთ ამ "წყალბადის" ატომის ბმის ენერგია. დავუშვით $\mu a << 1$ და იპოვეთ პასუხი $(\mu a)^2$ სიზუსტით (აქ a ბორის პირველი რადიუსია).

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\psi = \dfrac{1}{\sqrt{\pi b^3}} e^{-\frac{r}{b}}$. (ვაკეთებთ $b \to a$ შეცვლას წყალბადის ატომთან შედარებით).

6.3 შეშფოთების არასტაციონალური თეორია

6.62.ნაწილაკზე, რომელიც ძირითად მდგომარეობაში იმყოფებოდა უსასრულოდ წარსულში ($t \to -\infty$), a სიგანის უსასრულო სიმაღლის ორმოში, მოქმედებას იწყებს სუსტი ერთგვაროვანი ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება

ა) $V(x,t) = -xF_0 \exp\left(-t^2/\tau^2\right)$

ბ) $V(x,t) = -xF_0 \exp\left(-|t|/\tau\right)$

შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ($t \to -\infty$). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

6.63.დამუხტულ წრფივ ოსცილატორზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება

ა) $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)$

ბ) $\varepsilon(x,t)=\varepsilon_0 \exp(-|t|/\tau)$.

ჩათვალეთ, რომ ველის ჩართვამდე ($t \to -\infty$), ოსცილატორი იმყოფებოდა n-ე სტაციონალურ მდგომარეობაში და შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ($t \to -\infty$). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

6.64.დამუხტულ წრფივ ოსცილატორზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება

ა) $\varepsilon(t)=\varepsilon_0\left(1+\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)^{-1}$ ბ) $\varepsilon(t)=\varepsilon_0 \exp\left(-\dfrac{t^2}{\tau^2}\right)\cos\omega_0 t$.

ჩათვალეთ, რომ ველის ჩართვამდე ($t \to -\infty$), ოსცილატორი იმყოფებოდა n-ე სტაციონალურ მდგომარეობაში და შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ($t \to -\infty$). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

6.65. დამუხტულ წრფივ ოსცილატორზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება

$$\varepsilon(t)=\varepsilon_0\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\right)$$

ჩათვალეთ, რომ ველის ჩართვამდე ($t \to -\infty$), ოსცილატორი იმყოფებოდა n-ე სტაციონალურ მდგომარეობაში და შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ($t \to -\infty$). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

6.66. $\vec{d}$ დიპოლური მომენტის მქონე ბრტყელ როტატორზე მოქმედებას იწყებს ერთგვაროვანი, დროში ცვალებადი ელექტრული ველი $\varepsilon(t)=f(t)\varepsilon_0$. ველის ჩართვამდე როტატორს გააჩნდა იმპულსის მომენტის m-ის განსაზღვრული მნიშვნელობა. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში უსასრულო მომავალში ($t \to -\infty$) იპოვეთ როტატორის ენერგიის პოვნის ალბათობები.

6.67*. იპოვეთ სისტემის საწყისი ($t \to -\infty$) დისკრეტული სპექტრის n მდგომარეობიდან საბოლოო ($t \to -\infty$) მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა არასტაციონალური შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში. ჩათვალეთ, რომ შეშფოთება $t \to \pm\infty$ დროს ნულის ტოლია.

მითითება: გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი თეორიული ნაწილის (6.16)-(6.21) ფორმულები.

6.68. თუ ვისარგებლებთ ამ თავის შესავალი თეორიული ნაწილის **(6.20)** ფორმულით, მაშინ $W_n=|a_{nn}(+\infty)|^2$ იმისა, რომ სისტემა იმავე საწყისს n მდგომარეობაში დარჩეს ერთზე მეტი გამოდის $W_n>1$, რაც ეწინააღმდეგება ნორმის დროში შენახვას. ახსენით წარმოქმნილი პარადოქსი.

6.69*. I ინერციის მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორი ბრუნავს xy სიბრტყეში და გააჩნია q მუხტი a მანძილზე z ბრუნვის ღერძიდან. უსასრულო წარსულში $(t \to -\infty)$ როტატორი ძირითად მდგომარეობაში იმყოფებოდა. z ღერძის პარალელურად $b>>a$ მანძილზე როტატორს v

სიჩქარით ჩაუფრინა Q მუხტის მქონე წერტილოვანმა ნაწილაკმა, ისე რომ ეს ნაწილაკი $t=0$ მომენტში $z=0$ სიბრტყეს კვეთავს. იპოვეთ უსასრულო მომავალში $(t\to\infty)$ როტატორის ენერგიების პოვნის ალბათობები. მიუთითეთ, თუ რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.
მითითება: ჩათვალეთ, რომ მუხტი მოძრაობს $z=b$ წრფის გასწვრივ. მაშინ მისი როტატორთან ელექტროსტატიკური ურთიერთქმედების ენერგია იქნება $qQ\left(b^2+a^2-2ab\cos\varphi+v^2t^2\right)^{-1/2}$. გაშალეთ ეს გამოსახულება a/b მცირე პარამეტრის მიხედვით და მიიღეთ შეშფოთების ოპერატორის გამოსახულება.
6.70*. q მუხტის მქონე ორგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორი ω სიხშირით ირხევა xy სიბრტყეში $x=y=0$ წერტილის მახლობლად. z ღერძის პარალელურად b მანძილზე ოსცილატორს v სიჩქარით ჩაუფრინა Q მუხტის მქონე წერტილოვანმა ნაწილაკმა, ისე რომ ეს ნაწილაკი $t=0$ მომენტში xy სიბრტყეს კვეთავს. უსასრულო წარსულში $(t\to-\infty)$ ოსცილატორი ძირითად მდგომარეობაში იმყოფებოდა. იპოვეთ უსასრულო მომავალში $(t\to\infty)$ ოსცილატორის ენერგიების პოვნის ალბათობები იმ დაშვებით, რომ $b>>\sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega}}$. მიუთითეთ, თუ რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.
მითითება: ამოხსნა ანალოგიურია წინა 6.69 ამოცანის
6.71. განიხილეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორი ω_0 სიხშირით და q მუხტით. $t=0$ მომენტამდე ნაწილაკი იმყოფებოდა ძირითად მდგომარეობაში. ოსცილატორზე τ დროის განმავლობაში მოქმედებას იწყებს შეშფოთება - სუსტი ელექტრული ველი

$$W(t)=\begin{cases}-q\varepsilon x; & 0\le t\le\tau\\ 0; \; t<0 : t>\tau\end{cases}$$

სადაც ε ველის დაძაბულობაა. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ $n=1$ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა.
6.72.სისტემას გააჩნია დისკრეტული E_n სპექტრი ψ_n ტალღური ფუნქციებით. მასზე $t=-\infty$ მომენტში (როდესაც შეუშფოთებელი სისტემა ψ_0 ძირითად მდგომარეობაში იმყოფება) მოქმედებას იწყებს შემდეგი შეშფოთება

$$\hat{V}=V_0(r)\frac{e^{-\frac{t^2}{\tau^2}}}{\tau\sqrt{\pi}}$$

როგორია იმის ალბათობა, რომ სისტემა $t=\infty$-თვის გადავა $\psi_k ; k>0$ მდგომარეობაში.
6.73. განვიხილოთ ერთგანზომილებიანი a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალური ორმო. $t=0$ მომენტში $a/4<x<3/4$ ინტერვალში მოქმედებას იწყებს მუდმივი V_0 შეშფოთება. როგორია იმის ალბათობა, რომ $t=0$ მომენტში ψ_3 მდგომარეობაში მყოფი სისტემა დროის t მომენტში ψ_1 მდგომარეობაში აღმოჩნდება

თავი 7. კვაზიკლასიკური მიახლოება

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში შრედინგერის ერთგანზომილებიანი განტოლების ორი დამოუკიდებელი ამონახსნია

$$\Psi_E^{\pm}(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int_c^x p(x) dx \right\} \tag{7.1}$$

$$p = \sqrt{2m(E - U(x))} \tag{7.2}$$

კვაზიკლასიკურობის გამოყენების პირობა ასე გამოიყურება

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \equiv \hbar \left| \frac{d(1/p)}{dx} = m\hbar \left| \frac{U'(x)}{p^3(x)} \right| \right| << 1 \tag{7.3}$$

ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობაა

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(E_n - U(x))} dx = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right); \; n = 0,1,2... \tag{7.4}$$

სადაც a და b ე.წ. მობრუნების წერტილებია ანუ ის წერტილებია,სადაც $U(x) = E_n$.

(7.4) ფორმულის n-ით გაწარმოებით,მივიღებთ მანძილს მეზობელ დონეებს შორის

$$\delta E_n \equiv E_{n+1} - E_n \approx \frac{\partial E_n}{\partial n} = \hbar \omega(E_n) \tag{7.5}$$

სადაც $\omega(E_n) = \dfrac{2\pi}{T(E_n)}$ კლასიკური E_n ენერგიის კლასიკური ნაწილაკის მოძრაობის სიხშირეა, T კი მისი პერიოდი.

ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქციისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა

$$\Psi_n(x) \approx \begin{cases} \dfrac{C_n}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\dfrac{1}{\hbar} \displaystyle\int_a^x p(x) dx + \dfrac{\pi}{4} \right); & a < x < b \\ 0; & x < a, x > b \end{cases} \tag{7.6}$$

რაც ნიშნავს, რომ კლასიკურად დაუშვებელ არეში ნაწილაკს შეღწევა არ შეუძლია (მისი ტალღური ფუნქცია ექსპონენციალურად ეცემა). ტალღური ფუნქციის ერთზე ნორმირების პირობიდან კი მივიღებთ

$$C_n^2 = \frac{2m\omega(E_n)}{\pi} \tag{7.7}$$

ხოლო რხევის პერიოდისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა

$$T(E_n) = \frac{2\pi}{\omega(E_n)} = 2m \int_a^b \frac{dx}{p(x, E_n)} \tag{7.8}$$

კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში ბარიერში გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ფორმულით მოიცემა

$$D(E) = \exp\left\{-\frac{2}{\hbar}\int_a^b |p(x, Edx)|\right\} \tag{7.9}$$

7.1 ენერგეტიკული სპექტრის დაკვანტვა

7.1. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში ვიპოვოთ ჰარმონიული ოსცილატორის ენერგიები. რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები. პასუხი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.
7.2. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში ვიპოვოთ შემდეგი პოტენციალის

$$U(x) = -\frac{U_0}{ch^2 \frac{x}{a}}$$

ენერგიები.
7.3. ნაწილაკი მოძრაობს ველში

$$U(x) = U_0 \left|\frac{x}{a}\right|^{\nu}; U_0 > 0, \nu > 0$$

გამოიკვლიეთ კვაზიკლასიკურ შემთხვევაში დიდი n-ებისთვის როგორაა დამოკიდებული ენერგიის დონეებს შორის მანძილი ν პარამეტრზე. როგორია დისკრეტული სპექტრის სიმკვრივე.
7.4. ნაწილაკის პოტენციალურ ენერგიას x_0 წერტილის მახლობლად შემდეგი სახე აქვს

$$U(x) \approx \pm\alpha|x - x_0|^{-\nu};\ \nu > 2$$

შრედინგერის განტოლების ამონახსნს, x_0 წერტილის მახლობლად, ν პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს კვაზიკლასიკური სახე? აქვს თუ არა ამონახსნს კვაზიკლასიკური სახე $\nu = 2$-თვის?
7.5. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგ ცენტრალურ ველში

$$U(r) = -\alpha r^{-\nu};\ \alpha > 0, \nu > 0$$

გამოარკვიეთ სივრცის რა არეში შრედინგერის განტოლების ამონახსნს s მდგომარეობაში $E = 0$ ენერგიით აქვს კვაზიკლასიკური სახე.
7.6*. კვაზიკლასიკურ მიახლოების გამოყენებით იპოვეთ დისკრეტული სპექტრის ზედა დონეები (ანუ დონეები, რომელთათვისაც $E_n \to \infty$), ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ველში

$$U(x) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha}{x^2},\ x > a;\ a > 0 \\ \infty,\ x < a \end{cases}$$

მიუთითეთ, თუ რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.
მითითება: ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობის გამოყენებისას ინტეგრალში გააკეთეთ ჩასმა $z = \sqrt{1 - \frac{|E_n| x^2}{\alpha}}$.
7.7*. ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ პოტენციალურ ველში

$$U(x) = U_0 \left|\frac{x}{a}\right|^{\nu}; U_0 > 0, \nu > 0$$

გამოარკვიეთ ν პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ კვაზიკლასიკური მიდგომის სტანდარტული ფორმულები: ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვა და მობრუნების წერტილების მახლობლად კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციების შეკერვა.
მითითება: გაშალეთ პოტენციალი x_0 წერტილის მახლობლად და შემოიფარგლეთ წრფივი წევრით.
7.8. ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობიდან მიიღეთ ნაწილაკის დონეების წანაცვლების ფორმულა, როდესაც მცირე $\delta U(x)$ სიდიდით იცვლება პოტენციალური ენერგია.
7.9*.მიახლოებით განსაზღვრეთ ნაწილაკის დისკრეტული მდგომარეობების რიცხვი მისი $U(\vec{r})$ ველში მოძრაობისას, რომელიც კვაზიკლასიკურობის მოთხოვნას აკმაყოფილებს.
მითითება: მდგომარეობათა რიცხვი, რომელიც "მოდის" ფაზურ მოცულობაზე, რომელიც შეესაბამება იმპულსებს $0 \le p \le p_{\max}$ და ნაწილაკის კოორდინატებს dV მოცულობაში, ტოლია $\frac{4\pi/3 p_{\max}^3 dV}{(2\pi\hbar)^3}$; $p_{\max} = \sqrt{-2mU(\vec{r})}$.
7.10.*მიახლოებით განსაზღვრეთ ნაწილაკის დისკრეტული მდგომარეობების რიცხვი მისი $U(r)$ ცენტრალურ ველში მოძრაობისას, რომელიც კვაზიკლასიკურობის მოთხოვნას აკმაყოფილებს.
მითითება: მდგომარეობების რიცხვი მოცემული M ორბიტალური მომენტისათვის ემთხვევა ერთგანზომილებიანი მოძრაობის მდგომარეობათა რიცხვს $U = V(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$ ეფექტური პოტენციალით.
7.11*.სფერული სიმეტრიის მქონე პოტენციალებისათვის $l = 0$ მდგომარეობაში კვაზიკლასიკური დაკვანტვის პირობა ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\int_0^{r_0} p(r)dr = (n - 1/4)\pi\hbar$$

სადაც r_0 მობრუნების წერტილია. გამოიყენეთ ეს ფორმულა ნაწილაკის ენერგიების საპოვნელად, რომელიც მოძრაობს ლოგარითმულ ველში

$$V(r) = V_0 \ln\frac{r}{a}$$

აჩვენეთ, რომ დონეებს შორის სხვაობა არ არის დამოკიდებული მასაზე.

მითითება: ინტეგრალის დათვლისას გამოიყენეთ ჩასმა $x = \ln\frac{r_0}{r}$.

7.2. კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციები,ალბათობები და საშუალოები. პოტენციალურ ბარიერებში გასვლა

7.12. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ $F(x)$ ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი საშუალო მნიშვნელობა დისკრეტული სპექტრის n-ე სტაციონალურ მდგომარეობაში. საილუსტრაციოდ დათვალეთ $\langle x^2 \rangle$ და $\langle x^4 \rangle$ წრფივი ოსცილატორისათვის.

7.13. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ $F(p)$ ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი საშუალო მნიშვნელობა დისკრეტული სპექტრის n-ე სტაციონალურ მდგომარეობაში. საილუსტრაციოდ დათვალეთ $\langle p^2 \rangle$ და $\langle p^4 \rangle$ წრფივი ოსცილატორისათვის.

7.14.ვიპოვოთ ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა კოორდინატთა სათავეში, თუ $r \to 0$-თვის ველი უსასრულობაში მიისწრაფვის შემდეგი კანონით $\pm \frac{\alpha}{r^s}$, სადაც $s > 2$

7.15. მიიღეთ ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობა, როდესაც ნაწილაკის მოძრაობა ერთი მხრიდან შემოსაზღრულია შეუღწევადი კედლით.

7.16. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში დათვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი პარაბოლური ბარიერისათვის

$$U(x) = \begin{cases} U_0\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

7.17. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში დათვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ბარიერისათვის

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0(1 - x/a), & x > 0 \end{cases}$$

7.18. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში დათვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ბარიერისათვის

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0 \exp(-x/a), & x > 0 \end{cases}$$

7.19*. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში დათვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ბარიერისათვის

$$U(x) = \frac{U_0}{ch^2 \dfrac{x}{a}}$$

მითითება: ინტეგრალის დათვლისას გამოიყენეთ $sh(x/a) = \eta \sin t$ ჩასმა, სადაც $\eta = \sqrt{\dfrac{U_0}{E} - 1}$

7.20. იპოვეთ გასვლის კოეფიციენტის კვაზიკლასიკურ გამოსახულებაში ექსპონენტის წინ მდგომი მამრავლი შემდეგი ბარიერისათვის

$$U(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \widetilde{U}(x), & x>0\end{cases}$$

იგულისხმება, რომ $x.>0$-თვის სრულდება კვაზიკლასიკურობის გამოყენების პირობა.

7.21. 7.17 ამოცანის ბარიერში გასვლის კოეფიციენტის გამოსახულებაში წინა 7.20 ამოცანის შედეგზე დაყრდნობით შეიტანეთ შესწორება ექსპონენტის წინ მდგომ მამრავლში. იპოვეთ კვაზიკლასიკურობა გამოყენების პირობა.

7.22*. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკის (ნულოვანი ორბიტალური მომენტით) გამოსვლის ალბათობა შემდეგი ცენტრალურ-სიმეტრიული ორმოდან

$$U(r)=\begin{cases}-U_0, & r<r_0\\ \dfrac{\alpha}{r}, & r>r_0;\ \alpha>0\end{cases}$$

მითითება: ცენტრალური სიმეტრიის ამოცანა დაიყვანება ერთგანზომილებიან შემთხვევაზე,რის გამოც შეიძლება გამოვიყენოთ წინა ამოცანებში მიღებული შედეგები.

7.23*. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში (ექსპონენციალური მამრავლის სიზუსტით) იპოვეთ m მასისა და E ენერგიის ნაწილაკის პოტენციალურ ბარიერში

$$U(x)=U_0e^{-\frac{|x|}{x_0}};\ U_0>0;\ x_0>0$$

გასვლის კოეფიციენტი.

მითითება: ინტეგრალის დათვლისას გააკეთეთ ჩასმა $\sqrt{\dfrac{U_0}{E}e^{-\frac{x}{x_0}}-1}=y$

თავი 8. სპინი

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

1) s სპინიანი ნაწილაკის ტალღურ ფუნქციას $2s+1$ კომპონენტი აქვს და s_z წარმოდგენაში ერთი სვეტის სახით მოიცემა

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(\vec{r},s) \\ \psi(\vec{r},s-1) \\ \psi(\vec{r},s-2) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \psi(\vec{r},-s) \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

სადაც $\psi(\vec{r},\sigma)$ წარმოადგენს მდგომარეობის ამპლიტუდას, რომელშიც სპინის პროექცია z ღერძზე σ-ს ტოლია,ამასთან $\sigma = s, s-1, s-2, \ldots, -s$. ამ წარმოდგენაში სპინის ვექტორის კომპონენტების ოპერატორი გამოისახება $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$ მატრიცებით.

$s = 1/2$ სპინისათვის ეს $\hat{\vec{s}} = \vec{\sigma}/2$ ოპერატორები გამოისახებიან პაულის მატრიცებით

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \; \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

პაულის მატრიცებს შემდეგი თვისებები აქვთ

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1 \tag{8.3}$$

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i\hat{\sigma}_z; \; \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = -i\hat{\sigma}_y; \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i\hat{\sigma}_x \tag{8.4}$$

და ისინი ანტიკომუტირებენ ერთმანეთთან

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = 0; \; \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = 0; \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = 0 \tag{8.5}$$

მოკლედ (8.3) - (8.5) თანაფარდობები ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = \delta_{ik} + i\varepsilon_{ikl} \hat{\sigma}_l \tag{8.6}$$

სადაც $i = 1,2,3$ და $\hat{\sigma}_1 \equiv \hat{\sigma}_x; \; \hat{\sigma}_2 \equiv \hat{\sigma}_y; \hat{\sigma}_3 \equiv \hat{\sigma}_z$

$s = 1/2$ სპინისათვის სპინური ფუნქციის ჩასაწერად ხშირად გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები

$$\psi_1 \equiv \psi(\sigma = 1/2); \qquad \psi_2 \equiv \psi(\sigma = -1/2) \tag{8.7}$$

ასე, რომ ამ შემთხვევაში (8.1) ფუნქცია ასე ჩაიწერება

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{8.8}$$

ხოლო სკალარულ ნამრავლს სპინურ სივრცეში შემდეგი სახე აქვს

$$\langle \Phi | \Psi \rangle \equiv \Phi^\bullet \Psi \equiv \varphi_1^\bullet \psi_1 + \varphi_2^\bullet \psi_2 \tag{8.9}$$

8.1. $s = 1/2$ სპინიანი ნაწილაკისათვის იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები და ფუნქციები $\hat{s}_x, \hat{s}_y$ და $\hat{s}_z$ ოპერატორებისათვის.

8.2. შეამოწმეთ, რომ $\left[s^2, s_z\right] = 0$, სადაც $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$

8.3. ისარგებლეთ პაულის მატრიცების ცხადი სახით და შეამოწმეთ, შემდეგი თანაფარდობების სამართლიანობა

ა) $\left[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y\right] = 2i\hat{\sigma}_z$ ბ) $\hat{s}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2$, $\hat{\sigma}^2 = 3I$

8.4. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა

$$\left(\sigma\vec{A}\right)\left(\sigma\vec{B}\right) = \vec{A}\vec{B} + i\sigma\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$$

სადაც $\sigma = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\right)$ პაულის მატრიცებია, $\vec{A}$ და $\vec{B}$ კი ვექტორული ოპერატორებია, რომლებიც კომუტირებენ σ მატრიცებთან,მაგრამ შესაძლოა ერთმანეთთან არ კომუტირებდნენ.

8.5. იპოვეთ $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორით განსაზღვრულ ნებისმიერ მიმართულებაზე სპინის $\hat{s}_n$ ოპერატორის სახე.

8.6. იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები $f = a + \vec{b}\,\hat{\vec{\sigma}}$,სადაც a რიცხვია, $\vec{b}$ ჩვეულებრივი ვექტორია, $\hat{\vec{\sigma}}$ პაულის მატრიცები.

8.7. შეიძლება თუ არა ელექტრონის სპინის პროექციების კვადრატებს x, y და z ღერძებზე ერთდროულად ჰქონდეთ გარკვეული მნიშვნელობები?

8.8. ნებისმიერი წრფივი ოპერატორი $\hat{L}$, რომელიც მოქმედებს $s = 1/2$ სპინიანი ნაწილაკის სპინური ცვლადების სივრცეში, მეორე რანგის მატრიცას წარმოადგენს. რა შეზღუდვებს ადებს $\hat{L}$ ოპერატორის ერმიტულობა მისი მატრიცის ელემენტებს?

იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები ასეთი ერმიტული ოპერატორისა.

8.9. დარწმუნდით იმაში, რომ ოთხი მეორე რანგის მატრიცები $\hat{1}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ ადგენენ სრულ სისტემას, რისთვისაც აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის $\hat{A}$ მატრიცა შეიძლება გაიშალოს ამ მატრიცებად

$$\hat{A} = a_0\hat{1} + a_x\hat{\sigma}_x + a_y\hat{\sigma}_y + a_z\hat{\sigma}_z = a_0 + \vec{a}\vec{\sigma}$$

სადაც $a_0 = \frac{1}{2} Sp\hat{A}$, $\vec{a} = \frac{1}{2} Sp\left(\hat{\vec{\sigma}}\hat{A}\right)$

8.10. იპოვეთ ცხადი სახე შემდეგი ოპერატორებისა $\left|\hat{\sigma}_z\right|, \left|\hat{\vec{\sigma}}\right|$

8.11. იპოვეთ ცხადი სახე ოპერატორისა $\vec{\sigma}\left[\vec{\sigma}\vec{\sigma}\right]$

8.12. გაამარტივეთ გამოსახულება $\left(\vec{a}\hat{\vec{\sigma}}\right)^n$, სადაც $\vec{a}$ ჩვეულებრივი ვექტორია, $\hat{\vec{\sigma}}$ პაულის მატრიცები, ხოლო n მთელი რიცხვია.

8.13. $s = 1/2$ სპინის შემთხვევაში იპოვეთ ამწევი და დამწევი $\hat{s}_\pm$ ოპერატორების სახე. რას უდრის $\hat{s}_\pm^2$ ოპერატორები?

8.14. ვიპოვოთ პროექციული $\hat{P}_{s_z = \pm\frac{1}{2}}$ ოპერატორი, რომელიც აპროექცირებს სპინის პროექციის განსაზღვრულ $s_z = \pm 1/2$ მნიშვნელობებს z ღერძზე

8.15. ვიპოვოთ პროექციული $\hat{P}_{s_z = \pm\frac{1}{2}}$ ოპერატორი, რომელიც აპროექცირებს სპინის პროექციის განსაზღვრულ $s_z = \pm 1/2$ მნიშვნელობებს ღერძზე, რომლის მიმართულება განისაზღვრება $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორით.

8.16. $s=1/2$ სპინიანი ნაწილაკისათვის მიუთითეთ სპინური ტალღური $\Psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ ფუნქციის გარდაქმნის კანონი კოორდინატთა ღერძების φ_0 კუთხეზე მობრუნებისას იმ ღერძის მიმართ, რომლის მიმართულება განისაზღვრება $\vec{n}_0$ ერთეულოვანი ვექტორით.
8.17. წინა 8.13 ამოცანის შედეგების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ $\Phi^\bullet\Psi=\varphi_1^\bullet\psi_1+\varphi_2^\bullet\psi_2$ სიდიდე არ იცვლება მითითებული გარდაქმნებისას.
8.18*. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა ღერძების მობრუნებისას $\vec{V}=\Phi^\bullet\hat{\vec{\sigma}}\Psi\left(V_i=\sum_{\alpha,\beta}\varphi_\alpha^\bullet\left(\hat{\sigma}_{\alpha\beta}\right)\psi_\beta\right)$ გარდაიქმნება როგორც ვექტორი.
მითითება: გამოიყენეთ 8.11 ამოცანის შედეგები და $\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_k=\delta_{ik}+i\varepsilon_{ikl}\hat{\sigma}_l$ თანაფარდობა.
8.19. წარმოადგინეთ $\left(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2\right)^2$ გამოსახულება იმ სახით, რომელიც შეიცავს პაულის $\hat{\vec{\sigma}}_{1,2}$ მატრიცებს არაუმეტეს პირველი ხარისხისა. ამ მატრიცების 1, 2 ინდექსები ნიშნავს, რომ ეს მატრიცები წარმოადგენენ ოპერატორებს, რომლებიც მოქმედებენ **I** და **II** ნაწილაკების სპინური ცვლადების სივრცეში.
8.20. $s=1/2$ სპინიანი ნაწილაკი იმყოფება მდგომარეობაში, როცა განსაზღვრული მნიშვნელობა აქვს აქვს სპინის პროექციას $s_z=1/2$. განსაზღვრეთ სპინის პროექციის შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობები z' ღერძზე, რომელიც θ კუთხეს ადგენს z ღერძთან.
8.21*. იპოვეთ ცხადი სახე ოპერატორისა $\hat{F}=F\left(a+\vec{b}\,\vec{\sigma}\right)$,სადაც $F(x)$ ნებისმიერი ფუნქციაა x ცვლადისა, $a=const$, $\vec{b}$ კი ჩვეულებრივი ვექტორია.
მითითება: ჩათვალეთ, რომ $F\left(a+\vec{b}\,\vec{\sigma}\right)=A+\vec{B}\hat{\vec{\sigma}}$ და იპოვეთ A და $\vec{B}$, რისთვისაც z ღერძი მიმართეთ $\vec{b}$ ვექტორის გასწვრივ.
8.22. წინა 8.18 ამოცანის შედეგზე დაყრნობით იპოვეთ $\hat{F}=\exp(i\vec{a}\vec{\sigma})$ ოპერატორის ცხადი გამოსახულება.
8.23. ანორმირეთ სპინური ტალღური ფუნქციები
ა) $\psi=A\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ $(a,b\neq 0)$; ბ) $\psi=A\begin{pmatrix}3\\ 4i\end{pmatrix}$
8.24*. ვიპოვოთ ორი $s=1/2$ სპინიანი ნაწილაკის სპინების სკალარული ნამრავლი ტრიპლეტურ და სინგლეტურ მდგომარეობებში.
მითითება: გამოიყენეთ ტოლობა $\hat{s}^2=\hat{s}_-\hat{s}_++\hat{s}_z+\hat{s}_z^2$, სადაც $\hat{s}_\pm$ 8.12 ამოცანაში განხილული ამწევი და დამწევი ოპერატორებია.
8.25. $s=1/2$ სპინიანი ნაწილაკისათვის დათვალეთ $\hat{A}=is_xs_ys_z$ ოპერატორის საშუალო მნიშვნელობა, როდესაც ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

თავი 9. იგივური ნაწილაკები

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

იგივური ნაწილაკებისაგან შემდგარ სისტემის ტალღურ ფუნქციას გააჩნია გარკვეული სიმეტრია ამნაწილაკების გადასმის მიმართ

$$\Psi(\ldots,\xi_a,\ldots\xi_{b,}\ldots)=\pm\Psi(\ldots,\xi_b,\ldots\xi_{a,}\ldots) \qquad (9.1)$$

სადაც $\xi_n \equiv (\vec{r}_n,\sigma_n)$ შესაბამისი ნაწილაკების სივრცული და სპინური ცვლადების ერთობლიობაა. ამასთან ტალღური ფუნქცია სიმეტრიულია მთელ სპინიანი ნაწილაკების - ბოზონების გადასმისას და ანტისიმეტრიულია ნახევარსპინიანი ნაწილაკების - ფერმიონების გადასმისას.

იგივური ნაწილაკების სისტემის შესწავლა ხელსაყრელია ე.წ. შევსებათა რიცხვების წარმოდგენაში, სადაც გამოიყენება ნაწილაკთა $\hat{a}_i^+$ გაჩენისა და $\hat{a}_i^-$ გაქრობის ოპერატორები.

ბოზონებისათვის ეს ოპერატორები შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ:

$$[\hat{a}_i,\hat{a}_k]=[\hat{a}_i^+,\hat{a}_k^+]=0;\ \ [\hat{a}_i,\hat{a}_k^+]\equiv\hat{a}_i\hat{a}_k^+-\hat{a}_k^+\hat{a}_i=\delta_{ik} \qquad (9.2)$$

ხოლო ფერმიონებისათვის გვაქვს ანტიკომუტაციური თანაფარდობანი

$$\{\hat{a}_i,\hat{a}_k\}=\{\hat{a}_i^+,\hat{a}_k^+\}=0;\ \ \{\hat{a}_i,\hat{a}_k^+\}\equiv\hat{a}_i\hat{a}_k^++\hat{a}_k^+\hat{a}_i=\delta_{ik} \qquad (9.3)$$

ასე, რომ როგორც ეს (9.3)-დან ჩანს ფერმიონული ოპერატორებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობანი

$$\hat{a}_i^2=(\hat{a}_i^+)^2=0 \qquad (9.4)$$

შემოდის აგრეთვე ნაწილაკთა რიცხვის ოპერატორის ცნებაც

$$\hat{n}_i=\hat{a}_i^+\hat{a}_i \qquad (9.5)$$

ერთზე ნორმირებული მდგომარეობებისათვის, სამართლიანია სემდეგი თანაფარდობანი

$$\hat{a}_i|\ldots,n_i,\ldots\rangle=\sqrt{n_i}\,|\ldots,n_i-1,\ldots\rangle \qquad (9.6)$$

$$\hat{a}_i^+|\ldots,n_i,\ldots\rangle=\sqrt{n_i+1}\,|\ldots,n_i+1,\ldots\rangle \qquad (9.7)$$

ამასთან ფერმიონებისათვის $n_i=0$ ან $n_i=1$, ხოლო ბოზონებისათვის $n_i=0,1,2,\ldots$

9.1. ტალღური ფუნქციების სიმეტრია

9.1. s სპინიანი ორი ერთნაირი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის იპოვეთ რამდენი განსხვავებული სპინური მდგომარეობა იქნება, რომლებიც სიმეტრიულია ან ანტისიმეტრიულია ორივე ნაწილაკის სპინური ცვლადების გადასმის მიმართ.

9.2. ცნობილია, რომ $\varphi_{f_i}(\vec{r})$ ფუნქციები წარმოადგენენ გარეშე ველში მყოფი ნაწილაკის სტაციონალური მდგომარეობების ტალღური ფუნქციების სივრცულ ნაწილს. ორი ასეთი s სპინიანი ერთნაირი ერთმანეთთან სუსტად ურთიერთქმედი ნაწილაკი იმყოფება ამ ველში

და მათი ორბიტალური მდგომარეობები ხასიათდება f_1 და f_2 კვანტური რიცხვებით და $f_1 = f_2 = f$.

იპოვეთ მდგომარეობათა საერთო რიცხვი სპინური თავისუფლების ხარისხების გათვალისწინებით, თუ ეს ნაწილაკები ა) ბოზონებია; ბ) ფერმიონებია.

9.3. წინა 9.2 ამოცანაში განიხილეთ შემთხვევა როცა $f_1 \neq f_2$.

9.4. ვაჩვენოთ, რომ თუ s სპინიანი n იგივური ნაწილაკი სხვადასხვა ორბიტალურ $\varphi_{f_1}(\vec{r}),\varphi_{f_2}(\vec{r}),...\varphi_{f_n}(\vec{r})$ მდგომარეობებში იმყოფებიან, მაშინ მათი მდგომარეობათა საერთო რიცხვი სპინური თავისუფლების ხარისხების გათვალისწინებით არის $G = (2s+1)^n$, იმისდა მიუხედავად თუ რა სტატისტიკას ემორჩილებიან ისინი.

9.5. $\psi_{f_i}(\xi)$ წარმოადგენენ ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობების ერთზე ნორმირებულ ტალღურ ფუნქციებს (f_i არის სრული კრებულის კვანტური რიცხვები, ხოლო $\xi = (\vec{r},\sigma)$,სადაც σ სპინური ცვლადია). იპოვეთ ერთზე ნორმირებული ტალღური ფუნქციები სისტემისა, რომელიც შედგება სამი იგივური ბოზონისაგან და იმყოფებიან მდგომარეობაში, რომელიც ხასითდება f_1, f_2, f_3 კვანტური რიცხვებით.

9.6.$s=1$ სპინიანი სამი იგივური ბოზონი იმყოფებიან ერთნაირ ორბიტალურ მდგომარეობებში, რომელიც $\varphi(\vec{r})$ ტალღური ფუნქციით აღიწერება. დაწერეთ სისტემის შესაძლო მდგომარეობები ნორმირებული ტალღური ფუნციები სპინური თავისუფლების ხარისხების გათვალისწინებით. რამდენი ასეთი დამოუკიდებელი მდგომარეობა არსებობს? რა მნიშვნელობები შეიძლება შეიძინოს ჯამურმა სპინმა?

9.7. ერთმანეთთან სუსტად ურთიერთქმედი $s=0$ სპინიანი სამი იგივური ბოზონი სტაციონალურ მდგომარეობაში იმყოფებიან ერთიდაიგივე კვანტური n_r და l რიცხვებით, ამასთან $l=1$. რამდენი ასეთი დამოუკიდებელი მდგომარეობა არსებობს?

9.8. წინა 9.7 ამოცანის პირობებში აჩვენეთ, რომ ჯამური L მომენტი სამი ბოზონისა არ შეიძლება იყოს ნული.

9.9.$s=0$ სპინიანი ორი იგივური ბოზონის სტაციონალურ მდგომარეობაში იმყოფებიან, რომელიც აღიწერება ნორმირებული ტალღური $\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ ფუნქციით. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ერთი ნაწილაკი იმყოფება dV_1 მოცულობაში, მეორე კი dV_2 მოცულობაში. სწორად ანორმირეთ მიღებული გამოსახულება.

9.10. $s=0$ სპინიანი ორი იგივური ბოზონის სტაციონალურ მდგომარეობაში იმყოფებიან, რომელიც აღიწერება ნორმირებული ტალღური $\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ ფუნქციით. როგორია იმის ალბათობა, რომ

ა) ორივე ნაწილაკი იმყოფება გარკვეული V მოცულობის შიგნით?

ბ) ერთი ნაწილაკი იმყოფება V მოცულობის შიგნით, მეორე კი V მოცულობის გარეთ?

9.11.$s=0$ სპინიანი ორი იგივური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში ერთი ბოზონის ტალღური ფუნქციაა $\psi_1(\vec{r})$, ხოლო მეორესი $\psi_2(\vec{r})$. ეს ფუნქციები ერთიანზე ნორმირებული და აქვთ ურთიერთსაპირისპირო ლუწობები. სისტემის მოცემულ მდგომარეობაში იპოვეთ სისტემის ერთ-

ერთი ნაწილაკის განაწილება კოორდინატების მიხედვით, მაშინ როდესაც ნებისმიერია (არ ფიქსირდება) მეორე ნაწილაკის მდებარეობა. როგორია იმის ალბათობა, რომ ა) ერთი ნაწილაკი; ბ) ორივე ნაწილაკი იმყოფებიან სივრცის მოცულობაში, რომლისთვისაც $z \geq 0$? შედარეთ მიღებული მნიშვნელობანი სხვადასხვა ნაწილაკების შემთხვევას.
9.12. განიხილეთ წინა 9.11-ის ანალოგიური ამოცანა, როცა სისტემა შედგება ორი იგივური ფერმიონისაგან, რომლებიც იმყოფებიან ერთიდაიგივე სპინურ მდგომარეობებში.
9.13*. $s=0$ სპინიანი ორი იგივური ბოზონისგან შედგენილი სისტემისათვის ნაწილაკებს შორის მანძილის მიხედვით იპოვეთ განაწილების ფუნქცია. როგორ აისახება მიღებულ განაწილებაში ნაწილაკების იგივურობა? რა ფიზიკური აზრი აქვს გამოსახულებას $\int \left|\Psi(\vec{r},\vec{r})\right| d\vec{r}$,სადაც $\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ სისტემის ნორმირებული ტალღური ფუნქციაა.
მითითება: შემოიღეთ მასათა ცენტრისა და ფარდობითი რადიუს ვექტორები: $\vec{R}=\dfrac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$; $\vec{r}=\vec{r}_1-\vec{r}_2$
9.14. როგორც ცნობილია ორი სხეულის ამოცანაში მასათა ცენტრისა და ფარდობითი მოძრაობა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. აჩვენეთ, რომ ორი იგივური ნაწილაკისათვის ტალღური ფუნქციის სიმეტრია ნაწილაკების გადასმის მიმართ არ არღვევს ზემოთ ნახსენებ დამოუკიდებლობას.
9.15. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს ჯამურმა S სპინმა ორი s სპინიანი იგივური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში იმ მდგომარეობაში, როდესაც ფარდობითი ორბიტალური მომენტია L (L მომენტია ინერციის ცენტრის სისტემაში) ანუ რა ${}^{2S+1}L$ მდგომარეობებია შესაძლებელი ორი იგივური ბოზონისაგან შედგენილ სისტემაში? განიხილეთ კერძო შემთხვევა $s=0$.
9.16.განიხილეთ წინა 9.15 ამოცანის მგავსი ამოცანა ორი ფერმიონისათვის.სპეციალურად განიხილეთ $s=1/2$ სპინიანი ფერმიონების შემთხვევა.
9.17. ორი იგივური $s=0$ სპინიანი ბოზონი ერთმანეთთან დაკავშირებულია $U=\dfrac{k(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2}{2}$ პოტენციალით. როგორია სისტემის ენერგეტიკული სპექტრი?
მითითება: ისარგებლეთ 4.28 ამოცანის შედეგებით.
9.18. სისტემა შედგება სამი იგივური ნაწილაკისაგან; $\vec{r}_{1,2,3}$- ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებია ინერციის ცენტრის სისტემაში. როგორ იქცევა $\vec{r}_1\vec{r}_2$ სიდიდე 1 და 3 ნაწილაკების გადსმისას?
9.19. აჩვენეთ, რომ სამი ნაწილისაგან შემდგარ სისტემაში (არ არის აცილებელი ნაწილაკები იგივური იყვნენ) მდგომარეობას, რომელშიც ჯამური ორბიტალური მომენტი $L=0$ ინერციის ცენტრის სისტემაში, გააჩნია გარკვეული დადებითი ლუწობა.
9.20. სპინიანი ორი იგივური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში ერთი ბოზონის ტალღური ფუნქციაა $\psi_1(\vec{r})$, ხოლო მეორესი $\psi_2(\vec{r})$. ეს ფუნქციები ერთიანზე ნორმირებული და ურთიერთორთოგონალურია.

როგორია იმის ალბათობა ორივე ნაწილაკი იმყოფებიან სივრცის მცირე dV მოცულობაში? შედარეთ მიღებული მნიშვნელობანი სხვადასვა ნაწილაკების შემთხვევას.

9.21[*]. $s=0$ სპინიანი ორი იგივური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში ერთი ბოზონის ტალღური ფუნქციაა $\psi_1(\vec{r})$, ხოლო მეორესი $\psi_2(\vec{r})$. ეს ფუნქციები ერთიანზე ნორმირებული. იპოვეთ ასეთი სისტემის საშუალო სიმკვრივე და შეადარეთ განსხვავებული ნაწილაკების შემთხვევას.

მითითება: ერთიანზე ნორმირებული ტალღურ ფუნქციაა

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=C\{\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2)+\psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)\}$$

სადაც

$$2C^2=\left(1+\left|\langle\psi_2|\psi_2\rangle\right|^2\right)^{-1}$$

9.22. თუ ψ_a და ψ_b ორთონორმირებული ფუნქციებია.

ა) მაშინ რისი ტოლია A სიდიდე გამოსახულებაში

$$\psi_\pm(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=A[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2)\pm\psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)]$$

ბ) რისი ტოლია A სიდიდე თუ $\psi_a=\psi_b$ (რასაკვირველია, ეს შემთხვევა ეხება მხოლოდ ბოზონებს)

9.23. ორი არაურთიერთქმედი ტოლი m მასის ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. იპოვეთ ენერგიის ძირითადი დონე 3 შემთხვევაში: ა) განსხვავებული ნაწილაკებისათვის ბ) ბოზონებისათვის გ) ფერმიონებისათვის.

9.24. დაწერეთ ჰამილტონიანი ორი არაურთიერთქმედი იგივური ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. შეამოწმეთ, რომ წინა 9.23 ამოცანაში ფერმიონებისათვის ნაპოვნი ძირითადი დონე არის ჰამილტონიანის საკუთარი მნიშვნელობა.

9.25. ორი არაურთიერთქმედი ტოლი m მასის ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. იპოვეთ ენერგიის პირველი ორი აგზნებული დონე 3 შემთვევაში: ა) განსხვავებული ნაწილაკებისათვის ბ) ბოზონებისათვის გ) ფერმიონებისათვის. შეისწავლეთ დონეების გადაგვარების საკითხი.

9.26[*]. ორი არაურთიერთქმედი ტოლი m მასის ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან a სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციალურ ორმოში. ერთი მათგანი იმყოფება $\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{n\pi}{a}x$ მდგომარეობაში, მეორე კი მის ორთოგონალურ $\psi_m(x)=\sqrt{\dfrac{2}{a}}\sin\dfrac{m\pi}{a}x$ მდგომარეობაში. დათვალეთ საშუალო $\left\langle(x_1-x_2)^2\right\rangle$3 შემთვევაში: ა) განსხვავებული ნაწილაკებისათვის ბ) ბოზონებისათვის გ) ფერმიონებისათვის. შეისწავლეთ დონეების გადაგვარების საკითხი.

მითითება: ისარგებლეთ 2.9 ამოცანის შედეგებით: $\langle x\rangle_n=\frac{a}{2};\langle x^2\rangle_n=\frac{a^2}{3}-\frac{a^2}{2\pi^2(n+1)^2}$

9.2. მეორადი დაკვანტვის ფორმალიზმის ელემენტები

9.27. იპოვეთ კომუტაციური თანაფარდობები ოპერატორებისათვის, რომლებიც წარმოადგენენ ბოზონური გაქრობის $\hat{a}$ (ან $\hat{a}^+$ გაჩენის) ოპერატორების ერმიტულ და არაერმიტულ ნაწილებს.
9.28. გალ 10.19 და 5. 10.13. ნაწილაკის $\hat{x}$ კოორდინატის და $\hat{p}$ იმპულსის ოპერატორებისაგან ააგეთ $\hat{a}$ და $\hat{a}^+$ ოპერატორები, რომელთაც ექნებათ ბოზეს გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორების თვისებები.
როგორი სახე აქვს Ψ_0 "ვაკუუმურ" მდგომარეობას?
9.29. იპოვეთ გაჩენისა და გაქრობის ოპერატორების საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები. განიხილეთ ბოზესა და ფერმის ოპერატორები.
მითითება: გამოიყენეთ 2.57 ამოცანის შედეგები
9.30. ფერმიონული $\hat{b}$ გაქრობის და $\hat{b}^+$ გაჩენის ოპერატორების ანტიკომუტაციური თანაფარდობიდან გამომდინარე აჩვენეთ, რომ $\hat{n}=\hat{b}^+\hat{b}$ ნაწილაკთა რაოდენობის ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობებია 0 და 1.
9.31. $\hat{a}$ და $\hat{a}^+$ ოპერატორებიდან ახალ $\hat{a}'=\hat{a}+\alpha,\ \hat{a}'^+=\hat{a}^++\alpha^\bullet$ (α კომპლექსური რიცხვია) ოპერატორებზე გადასვლა წარმოადგენს თუ არა უნიტარულ გარდაქმნას? როგორია ამ უნიტარული ოპერატორის სახე? განიხილეთ ფერმიონული და ბოზონური გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორები.
მითითება: უნიტარული ოპერატორის სახის დასადგენად ისარგებლეთ 1.34 ამოცანის შედეგით.
9.32. $\hat{a}$ და $\hat{a}^+$ ოპერატორებიდან ახალ $\hat{a}'=\alpha\hat{a}+\beta\hat{a}^+,\ \hat{a}'^+=\alpha\hat{a}^++\chi\hat{a}$ (α და β ნამდვილი რიცხვია.) ოპერატორებზე გადასვლა წარმოადგენს თუ არა უნიტარულ გარდაქმნას? (წინასწარ გაარკვიეთ α და β-ს რა მნიშვნელობებისათვის არის აღნიშნული გარდაქმნა უნიტარული). განიხილეთ ფერმიონული და ბოზონური გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორები.
9.33. შეიძლება თუ არა შემდეგი გარდაქმნისას

$$\hat{a}'=\hat{a}^+,\ \hat{a}'^+=\hat{a}$$

$\hat{a}',\ \hat{a}'^+$ ოპერატორები განვიხილოთ როგორც გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორები ახალი ნაწილაკებისა? განიხილეთ ფერმიონული და ბოზონური შემთხვევები.
9.34. $\hat{a}^+_{f_i}$ ოპერატორი წარმოადგენს ნაწილაკის გაჩენის ოპერატორს Ψ_{f_i} მდგომარეობაში (f_i წარმოადგენს კვანტური რიცხვების სრულ კრებულს). ნებისმიერი ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობა $|1\rangle$ შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად

$$\left|1\right\rangle = \sum_i C_{f_i} \hat{a}^+_{f_i} \left|0\right\rangle$$

რა კვანტურმექანიკური აზრი გააჩნიათ C_{f_i} კოეფიციენტებს?

9.35. როგორც კერძო მაგალითი წინა 9.34 ამოცანისა განიხილეთ შემდეგი ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობა უსპინო ნაწილაკისა

$$\left|1\right\rangle = \int \varphi(r) \hat{\Psi}^+(\vec{r}) d\vec{r} \left|0\right\rangle$$

ანორმირეთ ეს ფუნქცია ერთიანზე და იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობა f ფიზიკური სიდიდისა.

9.36. $\hat{a}^+_{f_i}, \hat{a}_{f_i}$ და $\hat{a}^+_{g_k}, \hat{a}_{g_k}$ ოპერატორები წარმოადგენენ გაჩენისა და გაქრობის ოპერატორებს მდგომარეობებში რომლებიც ხასიათდებიან f_i და g_k კვანტური რიცხვების სრული კრებულებით. იპოვეთ თანაფარდობა ამ ოპერატორებს შორის.

9.37.ორნაწილაკოვანი მდგომარეობა იგივური ბოზონებისა (ან ფერმიონებისა) აღიწერება მდგომარეობის ვექტორით $\left|2\right\rangle = \hat{a}^+_{f_1} \hat{a}^+_{f_2} \left|0\right\rangle$, სადაც $\hat{a}^+_{f_i}$ ოპერატორი წარმოადგენს ნაწილაკის გაჩენის ოპერატორს Ψ_{f_i} მდგომარეობაში (f_i წარმოადგენს კვანტური რიცხვების სრულ კრებულს).

ანორმიეთ მდგომარეობის ვექტორი ერთიანზე. განიხილეთ f_1 და f_2 ერთნაირი და განსხვავებული კვანტური რიცხვები. კოორდინატულ წარმოდგენაში იპოვეთ ამ მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები როგორც ბოზონებისათვის, ასევე ფერმიონებისათვის.

9.38. ამოხსენით წინა 9.37 ამოცანის ანალოგიური ამოცანა სამნაწილაკოვანი მდგომარეობისათვის $\left|3\right\rangle = \hat{a}^+_{f_1} \hat{a}^+_{f_2} \hat{a}^+_{f_3} \left|0\right\rangle$.

თავი 10. ატომები და მოლეკულები

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

მრავალ ელექტრონიანი ატომების აღწერისას ძირითადი პრობლემაა შრედინგერის განტოლების ამოხსნა შემდეგი ჰამილტონიანისათვის:

$$H = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i^2 - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \sum_i \sum_j \frac{e^2}{r_{ij}} + W; \;\; i < j \qquad (10.1)$$

სადაც W სპინზე დამოკიდებული (სპინ-ორბიტალური,სპინ-სპინური და ზეფაქიზი ურთიერთქმედებები) პოტენციური ენერგიის ოპერატორია. ამოხსნისათვის გამოიყენება სხვადასხვა მიახლოებითი მეთოდები: შეშფოთების თეორია (იხილეთ 6.1 თავი), ვარიაციული მეთოდი (იხილეთ 6.2 თავი), ჰარტრი-ფოკის თვითშეთანხმებული ველის მეთოდი, თომას-ფერმის სტატისტიკური მოდელი და ა.შ.

ჰარტრი-ფოკის მეთოდის თანახმად, ელექტრონი მოძრაობს ატომგულისა და დანარჩენი ელექტრონების გასაშუალოებულ ველში. განვიხილოთ k-ური ელექტრონი. მისი ურთიერთქმედების ენერგია გულთან ტოლი იქნება $-\frac{Ze^2}{r_k}$-სი. იგივე ელექტრონი იმოქმედებს დანარჩენ ელექტრონებთან. მისი ურთიერთქმედება j-ურ ელექტრონთან, რომელიც გულიდან $\vec{r}_j$ მანძილზე იმყოფება, ტოლი იქნება გამოსახულების

$$\int \frac{e^2}{r_{ij}} \left|\psi\left(\vec{r}_j\right)\right|^2 d\vec{r}_j \qquad (10.2)$$

თუ ელექტრონთა რიცხვი ატომში N-ს უდრის, მაშინ k-ური ნაწილაკის ურთიერთქმედების პოტენციალს გულთან და ელექტრონებთან შემდეგი სახე აქვს

$$V\left(\vec{r}_k\right) = -\frac{Ze^2}{r_k} + \sum_{j=1}^{N} \int \frac{e^2 \left|\psi\left(\vec{r}_j\right)\right|^2}{\left|\vec{r}_k - \vec{r}_j\right|} d\vec{r}_j \qquad (10.3)$$

ამ პოტენციალის შრედინგერის განტოლებაში შეტანით მიიღება ინტეგროდიფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა შესაძლებელია მიმდევრობითი მიახლოების (იტერაციის) მეთოდით.

მძიმე ატომებისათვის გამოიყენება თომას-ფერმის სტატისტიკური მოდელი, რომელშიც ელექტრონების წერტილოვანი მუხტები შეცვლილია მუხტის უწყვეტი განაწილებით $-e\rho(r)$ სიმკვრივით. ატომგულის ელექტროსტატიკური $\Phi(r)$ პოტენციალი და $\rho(r)$ სიმკვრივე აკმაყოფილებენ კლასიკურ პუასონის განტოლებას

$$\nabla^2\Phi = 4\pi e\rho \qquad (10.4)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით

$$\lim_{r\to 0} r\Phi = Ze; \quad \lim_{r\to\infty} \Phi = 0 \qquad (10.5)$$

$\Phi(r)$ პოტენციალი შეიძლება გამოსახულ იქნას ϕ უგანზომილებო ფუნქციით:

$$\Phi(r)=\frac{Ze}{b}\frac{\phi(x)}{x} \quad (10.6)$$

სადაც $x=r/b$, $b=0{,}885Z^{-1/3}a$, $a=\hbar^2/me^2$ და $\phi(x)$ აკმაყოფილებს თომას-ფერმის განტოლებას

$$\frac{d^2\phi}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{x}}\phi^{3/2} \quad (10.7)$$

სასაზღვრო პირობებით

$$\phi(0)=1,\ \phi(\infty)=0 \quad (10.8)$$

ორატომიანი მოლეკულის ბრუნვითი ენერგიაა

$$E_\nu=\frac{\hbar^2\nu(\nu+1)}{2J_0}; \quad (10.9)$$

სადაც J_0 მოლეკულის ინერციის მომენტია, ν კი ბრუნვითი (როტაციული) კვანტური რიცხვი $(\nu=0,1,2,...)$. ν-ს შერჩევის წესია: $\Delta\nu=\pm1$

ორატომიანი მოლეკულის რხევითი ენერგიაა

$$E_N=\hbar\omega(N+1/2)[1-x(N+1/2)]; \quad (10.10)$$

სადაც $\omega=\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$ რხევის სიხშირეა, κ კვაზიდრეკადი ძალის კოეფიციენტია, μ მოლეკულის დაყვანილი მასა, N რხევითი (ვიბრაციული) კვანტური რიცხვი $(N=0,1,2,...)$, ხოლო x ანჰარმონიულობის კოეფიციენტი (ჰარმონიული ოსცილატორისათვის $x=0$). N-ს შერჩევის წესია:

$$\Delta N=\begin{cases}\pm1,\ x=0\\ \pm1,\pm2,...;\ x\neq0\end{cases} \quad (10.11)$$

ორატომიან მოლეკულაში ელექტრონის მდგომარეობა ხასიათდება შემდეგი კვანტური რიცხვებით: n,l,λ,σ, სადაც n და l მთავარი და ორბიტალური კვანტური რიცხვებია, $\lambda=|l_z|$ კვანტური რიცხვია, რომელიც განსაზღვრავს მოლეკულის ღერძზე l ორბიტალური მომენტის მოდულის პროექციას და $\lambda=0,1,2,...;$ σ სპინური კვანტური რიცხვია და $\sigma=\pm1/2$.

ელექტრონებს ეწოდებათ *ექვივალენტური* თუ მათ ერთნაირი n და l კვანტური რიცხვები გააჩნიათ.

Λ,Σ და Ω კვანტური რიცხვები ახასიათებენ $\vec{L},\vec{S}$ და $\vec{J}$ ჯამური მომენტების პროექციას ორატომიანი მოლეკულის ღერზე

$$\Lambda=\left|\sum_i(\pm\lambda_i)\right|,\qquad \Lambda=0,1,2,...L$$

$$\Sigma=\sum_i(\pm\sigma_i),\qquad \Sigma=S,S-1,...,-S$$

$$\Omega=\Lambda+\Sigma,\qquad \Omega=(\Lambda+S),(\Lambda+S-1),...(\Lambda-S)$$

$\Lambda=0$ თერმისათვის სპინის ორიენტაცია ღეძის მიმართ არ გვაქვს და Σ და Ω კვანტური რიცხვებს ფიზიკური არსი არ გააჩნიათ.

ცალკეული ელექტრონების მდგომარეობის და მოლეკულის გარსის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

$\sigma, \pi, \delta, \varphi, \ldots$ შესაბამისად $\lambda = 0,1,2,3,\ldots$-თვის

$\Sigma, \Pi, \Lambda, \Phi, \ldots$ შესაბამისად $\Lambda = 0,1,2,3,\ldots$-თვის

10.1. ერთ და ორელექტრონიანი ატომების სტაციონალური მდგომარეობები.

10.1. იპოვეთ წყალბადისეული ატომის ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის შესწორება შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იმის გათვალისწინებით, რომ ბირთვს გააჩნია ზომები. ბირთვი ჩათვალეთ R რადიუსიან სფეროდ, რომლის მოცულობაშიც თანაბრად არის განაწილებული Ze მუხტი. ($R = 1{,}2A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ სმ, $A \approx 2Z$, სადაც A ბირთვის ატომური ნომერია).შეაფასეთ შესწორება რიცხობრივად.

10.2. იპოვეთ წყალბადის ატომის ენერგიის შესწორებები შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში, რომელიც გამოწვეულია სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედებით

$$H' = \frac{\hbar^2 e^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

მითითება: გამოიყენეთ შემდეგი თანაფარდობა $\left\langle \vec{j}^{\,2} \right\rangle = j(j+1) = l(l+1) + s(s+1) + 2\left\langle \vec{l}\vec{s} \right\rangle$

10.3*. განიხილეთ წყალბადისეული ატომის s მდგომარეობის დონეების ზეფაქიზი სტრუქტურა, რომელიც გამოწვეულია ელექტრონის მაგნიტური მომენტის ურთიერთქმედებით ბირთვთან. ბირთვი წერტილოვან ნაწილაკად შეიძლება ჩავთვალოთ და მას გააჩნია I სპინი და μ_0 მაგნიტური მომენტი და $\hat{\vec{\mu}} = \frac{\mu_0}{I} \hat{\vec{I}}$.

მითითება: გამოიყენეთ ელექტრონის მაგნიტური მომენტის ბირთვთან ურთიერთქმედების ოპერატორის ცხადი სახე

$$\hat{V} = \frac{e\hbar\mu_0}{2mcI} \hat{I}_i (\hat{l}_k + 2\hat{s}_k) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \delta_{ik} \Delta \right) \frac{1}{r}$$

და ამ ოპერატორის გამოყენებით იპოვეთ ელექტრონის $\Psi_0(r)$ ძირითადი $1s$ მდგომარეობის საშუალო.

10.4. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში დაითვალეთ ორელექტრონიანი ატომის (ან იონის) ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. შეშფოთებად ჩათვალეთ ელექტრონებს შორის ურთიერთქმედება.

10.5. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში დაითვალეთ ორელექტრონიანი ატომის (ან იონის) ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. შეუშფოთებელ ჰამილტონიანად აიღეთ

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) - Z_{eff} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

(გამოყენებულია ატომურ ერთეულთა სისტემა). Z_{eff} პარამეტრი იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში ენერგიის შესწორების ნულთან გატოლებით.

10.6*.ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ორელექტრონიანი იონის ძირითადი ენერგია და იონიზაციის პოტენციალი.

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ წყალბადის ფუნქციების ნამრავლი გარკვეული Z_{eff} ეფექტური მუხტით, რომელიც ვარიაციული პარამეტრის როლს თამაშობს და გამოიყენეთ წინა 10.5 ამოცანაში დათვლილი ინტეგრალები.

10.7.იპოვეთ ორელექტრონიანი იონის საშუალო ენერგია, თუ ბირთვის მუხტია Ze და ტალღურ ფუნციას შემდეგი სახე აქვს

$$\Psi(r_1, r_2) = C[\exp(-\alpha r_1 - \beta r_2) + \exp(-\beta r_1 - \alpha r_2)]$$

10.8. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს ელექტრონების ფარდობითი მოძრაობის მომენტმა ჰელიუმისმაგვარი ატომების ორთო და პარამდგომარეობებში?

10.9*. ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ჰელიუმისმაგვარი ატომის 2^3S მდგომარეობის ენერგია და იონიზაციის პოტენციალი.

მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ სათანადოდ სიმეტრიზებული წყალბადის $2s$ და $1s$ მდგომარეობების ფუნქციების ნამრავლი გარკვეული Z_{eff} ეფექტური მუხტით, რომელიც ვარიაციული პარამეტრის როლს თამაშობს

10.2. მრავალელექტრონიანი ატომები

10.10.იპოვეთ შესაძლო თერმები ატომის აღგზნებული მდგომარეობებისა, რომელთაც შემდეგი ელექტრონული კონფიგურაცია გააჩნიათ (შევსებული გარსების ზემოთ; $n \neq n'$): ა) $nsn'p$; ბ) $npn'p$; გ) $npn'd$.

10.11.იპოვეთ შესაძლო თერმები ატომის აღგზნებული მდგომარეობებისა, რომელთაც შემდეგი ელექტრონული კონფიგურაცია გააჩნიათ (შევსებული გარსების ზემოთ): ა) $(np)^2$; ბ) $(np)^3$; გ) $(np)^4$

ხუნდის წესის გამოყენებით მიუთითეთ ატომის ნორმალური თერმი.

10.12. იპოვეთ N და Cl ატომების ძირითადი თერმები

10.13. განსაზღვრეთ ატომური თერმების ლუწობა, რომელთაც შემდეგი ელექტრონული კონფიგურაცია გააჩნიათ: ა) $(ns)^k$; ბ) $(np)^k$; გ) $(nd)^k$;

10.14. რას უდრის ატომის დამოუკიდებელ მდგომარეობათა რიცხვი, რომელთა ელექტრონული კონფიგურაციაა $(nl)^3$ და რომელიც შეესაბამება $S = \frac{3}{2}$ ელექტრონების ჯამურ სპინს?

10.15*. ატომის აგზნებულ მდგომარეობებს, რომელთა ელექტრონული კონფიგურაციაა $nsn'l(n \neq n')$, შეესაბამება ორი თერმი: ^1L და ^3L (L-ჯამური ორბიტალური მომენტია, $L = 0$). განიხილეთ ელექტრონებს შორის ურთიერთქმედება, როგორც შეშფოთება და აჩვენეთ, რომ ტრიპლეტური თერმის ენერგია სინგლეტური ენერგიის დაბლაა. არ დააკონკრეტოთ ns და $n'l$ ელექტრონების რადიალური ფუნქციების სახე.

მითითება: აჩვენეთ, რომ გაცვლითი ურთიერთქმდების ინტეგრალი დადებითი სიდიდეა.
10.16. თომას-ფერმის მოდელში გამოიყენეთ ნეიტრალური ატომის ელექტრონული სიმკვრივის ფორმულა და იპოვეთ ელექტრონის ბირთვიდან საშუალო დაშორების დამოკიდებულება Z-ზე.
10.17. თომას-ფერმის მოდელში იპოვეთ ელექტრონების იმპულსების მიხედვით განაწილება ნეიტრალურ ატომში, რომლის ბირთვის მუხტია Z. გაითვალისწინეთ, რომ ამ მოდელის $\chi(x)$ უნივერსალური ფუნქცია მონოტონურად კლებულობს x-ის ზრდასთან ერთად.
10.18. ვიპოვოთ თომას-ფერმის განაწილებაში s მდგომარეობაში მყოფი ელექტრონების რაოდენობის დამოკიდებულება Z-ზე.
10.19. ნეიტრალური ატომისათვის თომას-ფერმის მოდელში გამოსახეთ $n(r)$ ელექტრონული სიმკვრივის საშუალებით ელექტრონების კინეტიკური ენერგია, მათი ერთმანეთთან და ბირთვებთან ურთიერთქმედების ენერგია.
10.20. თომას-ფერმის მოდელში მიიღეთ ნეიტრალური ატომის სრული ენერგიის დამოკიდებულება $n(r)$ ელექტრონულ სიმკვრივეზე.
10.21*. ისარგებლეთ წინა 10.20 ამოცანაში მიღებული შედეგით $E[n(r)]$-თვის და აჩვენეთ, რომ ამ გამოსახულების მინიმიზაციით ტომას-ფერმის განტოლება. იგულისხმება, რომ $\int n(r)dV = Z$
მითითება: მინიმიზაციით მიღებული განტოლების ორივე მხარეზე იმოქმედეთ Δ ოპერატორით და გამოიყენეთ ტოლობა $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$

10.3. ორატომიანი მოლეკულა

10.22. ორი ელექტრონისაგან შედგენილი სისტემის მდგომარეობა აღიწერება ტალღური ფუნქციით $\Psi = \chi_{\alpha\beta}\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$,სადაც $\chi_{\alpha\beta}$ სპინური ფუნქციაა, ხოლო სივრცული ცვლადების $\psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს
ა) $\psi = f(r_1,r_2)$; ბ) $\psi = (\vec{r}_1\vec{n}_0 + \vec{r}_2\vec{n}_0)f(r_1,r_2)$; გ) $\psi = (\vec{r}_1\vec{n}_0 + \vec{r}_2\vec{n}_0)([\vec{r}_1\vec{r}_2]\vec{n}_0)f(r_1,r_2)$;
სადაც $\vec{n}_0$ მუდმივი ვექტორია.
ჩაატარეთ აღნიშნული მდგომარეობების კლასიფიკაცია ორატომიანი მოლეკულების თეორიის შესაბამისად.
10.23. მიუთითეთ წყალბადის H_2^+ მოლეკულური იონის თერმები, რომელებიც შესაძლოა მიღებულ იქნეს პროტონისა და წყალბადის ატომის შეერთების შედეგად, რომელიც იმყოფება $n = 2$ მთავარი კვანტური რიცხვის მქონე მდგომარეობაში.
10.24*. განსაზღვრეთ N_2, LiH, HCl, NO ორატომიანი მოლეკულების თერმები, რომლებიც შესაძლოა მიღებულ იქნენ ძირითად მდგომარეობაში მყოფი შესაბამისი ატომების შეერთების შედეგად.
მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ $N, Li\,H, Cl, O$ ატომების ძირითადი თერმებია ^4S_u, ^2S_g, ^2S_g, ^2P_u, ^3P_g

10.25. შესაძლებელია თუ არა პროტონების ადიაბატური დაშორებისას H_2 წყალბადის მოლეკულის თერმებიდან მიღებულ იქნას აღგზნებულ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ორი ატომი?

10.26. შესაძლებელია თუ არა LiH მოლეკულის თერმებიდან ბირთვების ადიაბატური დაშორებისას მივიღოთ აღგზნებულ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომი?

მითითება: ლითიუმის ატომის ძირითადი მდგომარეობის იონიზაციის პოტენციალი $I = 0{,}2$ ატ.ერთ.

10.27. ჩათვალეთ, რომ ცნობილია H_2 წყალბადის ატომის შემდეგი მახასიათებლები:

ა) მოლეკულის ძირითადი მდგომარეობის ორ არააგზნებულ წყალბადის ატომად დისოციაციის $I_0 = 4{,}46$ ევ. ენერგია.

ბ) მოლეკულის ω_e რხევის სიხშირე $\hbar\omega_e = 0{,}54$ ევ.

გ) როტაციური ცვლადი $B_e = 7{,}6 \cdot 10^{-3}$ ევ.

ამ მონაცემებით იპოვეთ ეს სიდიდეები HD და D_2 მოლეკულებისათვის ანუ იმ მოლეკულებისათვის, რომლებშიც ერთი ან ორივე ბირთვი-პრონები ჩანაცვლებულია დეიტრონით.

10.28*. ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ H_2^+ წყალბადის მოლეკულური იონის ძირითადი თერმის $E_0(R)$ ენერგია. მითითება: საცდელ ფუნქციად აიღეთ $\Psi(r) = \sqrt{\dfrac{\alpha^3}{\pi R^3}} e^{-\frac{\alpha r}{R}}$, სადაც r ელექტრონის დაშორებაა ბირთვების (პროტონების) შემაერთებელი მონაკვეთიდან, ხოლო α ვარიაციული პარამეტრი.

10.29. წინა 10.28. ამოცანაში მიღებულ $E_0(R,\alpha)$ გამოსახულებაში აიღეთ $\alpha = 1{,}9$ (α-ს ამ მნიშვნელობისათვის $E_0(R,\alpha)$ ორი ცვლადის ფუნქციას გააჩნია აბსოლუტური მინიმუმი გარკვეული R_0 თვისათვის, რომელიც დასადგენია). იპოვეთ R_0 იონის ზომა (R_0 მანძილია იონის ბირთვებს შორის წონასწორობის მდგომარეობაში), თერმის E_0 მინიმალური ენერგია და ბირთვების (იონის პროტონების) ნულოვანი რხევების W_0 ენერგია. შეადარეთ მიღებული შედეგები ექსპერიმენტალურ მონაცემებს $R_0 \approx 2$ ატომ.ერთ, $E_0 \approx -0{,}6$ ატომ.ერთ, $W_0 \approx 0{,}0044$ ატომ.ერთ. შეიძლება თუ არა მოცემული ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე დავასკვნათ, რომ არსებობს H_2^+ სტაბილური იონი?

10.30. ორატომიანი მოლეკულისათვის ცნობილია სამ მიმდევრობით ბრუნვით დონეებს შორის $\Delta E_1 = 0{,}2$ მევ და $\Delta E_2 = 0{,}3$ მევ. იპოვეთ ბრუნვითი ენერგია შუა დონისათვის.

10.31. ვიპოვოთ ენერგია, რომელიც აუცილებელია წყალბადის მოლეკულის აღსაგზნებად ძირითადი მდგომარეობიდან პირველ რხევით $(N = 1)$ დონეზე გადასასვლელად. რამდენჯერ არის მეტი ეს ენერგია მოცემული მოლეკულის პირველ ბრუნვით $(v = 1)$ დონეზე გადასვლელად? წყალბადის მოლეკულისათვის $\omega = 8{,}279 \cdot 10^{14}$ 1/წმ და $x = 28{,}5 \cdot 10^{-3}$

10.32*. HF მოლეკულისათვის დათვალეთ ბრუნვითი დონეების რიცხვი, რომლებიც მოთავსებულია ძირითად და პირველ აგზნებულ რხევით დონეს შორის.
მითითება: ჩათვალეთ, რომ ბრუნვითი მოძრაობა დამოუკიდებელია რხევითი მოძრაობისაგან.
10.33. პაულის პრინციპის საშუალებით დაადგინეთ მაქსიმალური მნიშვნელობა σ, π, δ ექვივალენტური ელექტრონებისა ორატომიან მოლეკულაში.
10.34. ორატომიან მოლეკულას შემდეგი ელექტრონული კომბინაციები გააჩნია:
ა) ორი ექვივალენტური σ ელექტრონი.
ბ) ორი არაექვივალენტური σ ელექტრონი.
გ) ერთი σ და ერთი π ელექტრონი.
დ) ორი ექვივალენტური π ელექტრონი.
ე) ორი არაექვივალენტური σ ელექტრონი.
თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ შესაძლო ელექტრონული მდგომარეობები მოლეკულის ანუ $^{2S+1}\Lambda$ სიმბოლოები.
10.35. იპოვეთ ორატომიანი მოლეკულის ელექტრონული გარსის ჯამური მომენტის პროექციის შესაძლო მნიშვნელობები შემდეგ ელექტრონულ მდგომარეობებში $^1\Sigma$, $^3\Sigma$ და $^2\Pi$.
10.36.. განსაზღვრეთ OH მოლეკულის შესაძლო ელექტრონული თერმები, რომლებიც წარმოიქმნება ჟანგბადის და წყალბადის ატომების $\left(^3P\right)$ და $\left(^2S\right)$ნორმალური თერმებიდან.

თავი 11. მოძრაობა მაგნიტურ ველში

ძირითადი ცნებები და ფორმულები

მაგნიტურ ველში მოძრავი s სპინის და μ_0 მაგნიტური მომენტის მქონე დამუხტული ნაწილაკის ჰამილტონიანს (პაულის ჰამილტონიანს) შემდეგი სახე აქვს

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + U - \frac{\mu_0}{s}\vec{H}\hat{\vec{s}} \tag{11.1}$$

ამასთან

$$\vec{H} = rot\vec{A}; \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\nabla \tag{11.2}$$

სიჩქარის ოპერატორს შემდეგი სახე აქვს

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\hat{\vec{p}} - e\vec{A}/c}{m} \tag{11.3}$$

რომლის კომპონენტები შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ

$$\left[\hat{v}_i, \hat{v}_k\right] = \frac{ie\hbar}{m^2c}\varepsilon_{ikl}H_l \tag{11.4}$$

ერთგვაროვან მაგნიტურ H_0 ველში განივი (მაგნიტური ველის მართობ სიბრტყეში) მოძრაობისას დამუხტული უსპინო ნაწილაკის ენერგეტიკული სპექტრი დისკრეტულია (ე.წ. ლანდაუს დონეები)

$$E_n = \hbar\omega_E\left(n + \frac{1}{2}\right), \ n = 0,1,2; \ \omega_E = \frac{|e|H_0}{mc} \tag{11.5}$$

თუ ნაწილაკს აქვს s სპინი და μ_0 მაგნიტური მომენტი, მაშინ ლანდაუს დონეებს ასეთი სახე აქვთ

$$E_n = \hbar\omega_E\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{\mu_0 H s_z}{s}, \ n = 0,1,2; \ \omega_E = \frac{|e|H_0}{mc} \tag{11.6}$$

სადაც s_z ნაწილაკის სპინის ოპერატორია მაგნიტური ველის გასწვრივ.

მაგნიტურ ველში დენის სიმკვრივე ორი შესაკრების სახით მოიცემა

$$\vec{j} = \vec{j}_{orb} + \vec{j}_{sp} \tag{11.7}$$

სადაც პირველი შესაკრები ორბიტალურ მოძრაობასთანაა დაკავშირებული

$$\vec{j}_{orb} = \frac{ie\hbar}{2m}\left\{\left(\nabla\Psi^*\right)\Psi - \Psi^*\left(\nabla\Psi\right)\right\} - \frac{e^2}{mc}\vec{A}\Psi^*\Psi \tag{11.8}$$

ხოლო მეორე – ნაწილაკის სპინურ მაგნიტურ მომენტთან

$$\vec{j}_{sp} = \frac{\mu_0}{s}c\,rot\left(\Psi^*\hat{s}\Psi\right) \tag{11.9}$$

11.1. გალ. 6.1. აჩვენეთ, რომ ვექტორული პოტენციალის გარკვეული ყალიბრებისას მაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის ჰამილტონიანი

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2$$

შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e}{mc}\vec{A}\hat{\vec{p}} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2$$

11.2. ვიპოვოთ სიჩქარის $\hat{\vec{v}}$ ოპერატორი დამუხტული ნაწილაკისა მაგნიტურ ველში. დაადგინეთ კომუტაციური თანაფარდობები ამ ვექტორის სხვადასხვა კომპონენტებს შორის $[\hat{v}_i, \hat{v}_k]$ და ასევე იპოვეთ კომუტატორი $[\hat{v}_i, \hat{x}_k]$

11.3. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისათვის იპოვეთ განივი (მაგნიტური ველისადმი მართობი) მოძრაობის ორბიტის ცენტრის $\hat{\vec{\rho}}_0$ კოორდინატის ოპერატორი, მისი კვადრატი $\hat{\vec{\rho}}_0^2$ და ორბიტის რადიუსის კვადრატის $\hat{\rho}^2$ ოპერატორი.

11.4. დაადგინეთ წინა 6.3. ამოცანაში მიღებული $\hat{\vec{\rho}}_0, \hat{\vec{\rho}}_0^2$ და $\hat{\rho}^2$ ოპერატორების კომუტაციური თანაფარდობები ერთმანეთთან და ჰამილტონიანთან.

11.5*.იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან z ღერძის გასწვრივ მიმართულ მაგნიტურ ველში ვექტორული პოტენციალის შემდეგი ყალიბრებებისას:

ა) $A_x = 0, A_y = H_0 x, A_z = 0$;

ბ) $A_x = -H_0 y, A_y = 0,\ A_z = 0$

მითითება: გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორები $\hat{p}_y$ და $\hat{p}_z$ კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან $\hat{H} = \frac{1}{2\mu}\left\{\hat{p}_x^2 + \left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}H_0 x\right)^2 + \hat{p}_z^2\right\}$ და ამოცანა დაიყვანეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ამოცანაზე. (ბ) შემთხვევაში კომუტირებენ $\hat{p}_y$ $\hat{p}_z$ და ამ ყალიბრების შესაბამისი $\hat{H}$).

11.6*. წინა 11.5 ამოცანაში ნაპოვნი იქნა ორი სრული სისტემა ტალღური ფუნქციებისა $\Psi_{np_y p_z}$ და $\Psi_{np_x p_z}$, რომლებიც აღწერენ სტაციონალური მდგომარეობებს დამუხტული ნაწილაკისა ერთგვაროვან H_0 მაგნიტურ ველში მოძრაობისას ვექტორი ველის ორი სხვადასხვა ყალიბრების შემთხვევაში. ვიპოვოთ თანაფარდობა ამ ტალღურ ფუნქციებს შორის.
მითითება: წარმოადგინეთ (გაშალეთ) ერთ-ერთი ფუნქცია მეორე ფუნქციების სუპერპოზიციებად და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ პოტენციალების ყალიბრული გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ როგორც უნიტარული გარდაქმნა, რომესაც ახორციელებს ოპერატორი

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f\right)$$

სადაც f განსაზღვრავს ყალიბრულ გარდაქმნას

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f$$

11.7*. იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ვექტორული პოტენციალის შემდეგი ყალიბრებისას: $\vec{A} = \frac{1}{2}\left[\vec{H}_0 \vec{r}\right]$. შესაძლოა თუ არა ერთიანზე ვანორმიროთ განივი მოძრაობის ტალღური ფუნქციები?

მითითება: გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორები $\hat{l}_z$ და $\hat{p}_z$ კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან (z ღერძი არჩეულია $\vec{H}_0$ ველის გასწვრივ) და ამოცანა დაიყვანეთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე.

11.8. იპოვეთ 11.3 ამოცანაში განხილული ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისათვის განივი (მაგნიტური ველისადმი მართობი) მოძრაობის ორბიტის ცენტრის კვადრატის $\hat{\vec{\rho}}_0^2$ და ორბიტის რადიუსის კვადრატის $\hat{\rho}^2$ ოპერატორების საკუთარი მნიშვნელობები.

11.9. იპოვეთ განივი სივრცული განაწილება ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისა Ψ_{nmp_z} სტაციონალურ მდგომარეობებში (იხილეთ 11.7), როდესაც $m = -\frac{e}{|e|} n$.

11.10*. იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ურთიერთმართობ ერთგვაროვან მაგნიტურ და ელექტრულ ველებში. მიმართეთ z ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ, ხოლო x ელექტრული ველის გასწვრივ. განიხილეთ ყალიბრება $A_x = A_z = 0$ და $A_y = Hx$.

მითითება: გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორები $\hat{p}_y$ და $\hat{p}_z$ კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან და ამოცანა დაიყვანეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ამოცანაზე.

11.11. იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს პარლელურ ერთგვაროვან მაგნიტურ და ელექტრულ ველებში.

მითითება: ისარგებლეთ 11.7. და 2.74 ამოცანების შედეგებით

11.12*. იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ენერგიის დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები დამუხტული სფერული ოსცილატორის (დამუხტული ნაწილაკი $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$ ცენტრალურ ველში), რომელიც იმყოფება ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში.

შეისწავლეთ ზღვრული შემთხვევები სუსტი და ძლიერი მაგნიტური ველებისა.
მითითება: გამოიყენეთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა (z ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ ის მიმართეთ) და ის ფაქტი, რომ ოპერატორები $\hat{l}_z$ და $\hat{H}_l = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{kz^2}{2}$ კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან და ამოცანა დაიყვანეთ 11.7 ამოცანაზე.

11.13. იპოვეთ სტაციონალური მდგომარეობების ენერგიის დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები დამუხტული ბრტყელი ოსცილატორის (დამუხტული ნაწილაკი, რომელიც სიბრტყეზე ასრულებს მოძრაობას ფიქსირებული წერტილიდან მოცემულ a მანძილზე),რომელიც იმყოფება ბრუნვის სიბრტყის მართობ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში.

11.14. აჩვენეთ, რომ სივრცის შეზღუდულ არეში ნულისაგან განსხვავებულ $H(\vec{r})$ მაგნიტურ ველს არ შეუძლია ”ჩაიჭიროს” დამუხტული უსპინო ნაწილაკი ანუ არ არსებობენ ნაწილაკის ისეთი სტაციონალური მდგომარეობები, რომლებშიც ის ლოკალიზირებულია სივრცის შეზღუდულ არეში.

11.15. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ვიპოვოთ სტაციონალური მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები და შესაბამისი ენერგეტიკული დონეები ნეიტრალური ნაწილაკის, რომელსაც $s = 1/2$ სპინი გააჩნია და აქვს სპინური მაგნიტური მომენტი μ_0 ($\hat{\vec{\mu}} = \mu_0 \hat{\vec{\sigma}}$).
მითითება: მიმართეთ z ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ. და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ $\hat{\vec{p}}$ და $\hat{s}_z = \frac{\hat{\sigma}_z}{2}$ ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამოცანის ჰამილტონიანთან.

11.16*.იპოვეთ ნეიტრონის სოლენოიდის მაგნიტურ ველში განივი მოძრაობის სტაციონალური მდგომარეობების დისკრეტული სპექტრის ენერგეტიკული დონეები და ტალღური ფუნქციები.
მითითება: მიმართეთ z ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ სოლენოიდის შიგნით და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ $\hat{s}_z = \frac{\hat{\sigma}_z}{2}$ ოპერატორი კომუტირებს ამოცანის ჰამილტონიანთან.

11.17. ნეიტრონი იმყოფება შემდეგი სახის სტაციონალურ მაგნიტურ ველში

$$H_\rho = H_\varphi = 0, \quad H_z = H(\rho)$$

(ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა). დაიყვანეთ ნეიტრონის სტაციონალური მდგომარეობების ტალღური ფუნქციების და ენერგეტიკული სპექტრის პოვნის ამოცანა ერთგანზომილებიანი ტალღური განტოლების ამოხსნაზე.
მითითება: მიმართეთ z ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ $\hat{s}_z, \hat{p}_z, \hat{l}_z$ ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამოცანის ჰამილტონიანთან.

11.18. იპოვეთ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში μ_0 მაგნიტური მომენტის მქონე $s = 1/2$ სპინიანი დამუხტული ნაწილაკის სტაციონალური მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები.

მითითება: გამოიყენეთ 10.5 ა) და 10.7 ამოცანების შედეგები.
11.19. აჩვენეთ, რომ პაულის ჰამილტონიანი ელექტრონისათვის და μ მეზონისათვის ელექტრომაგნიტურ ველში შემდეგი სახით შეიძლება ჩაიწეროს

$$\hat{H} = \frac{i\hat{\vec{\sigma}}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2}{2\mu} + e\varphi(\vec{r})$$

სამართლიანია თუ არა ჰამილტონიანის ამ სახით ჩაწერა სხვა $s = 1/2$ სპინიანი ნაწილაკებისათვის (პროტონი, ნეიტრონი და ა.შ)
მითითება: გამოიყენეთ 11.2 ამოცანის შედეგები და პაულის მატრიცის თვისებები.
11.20. აჩვენეთ, რომ სტაციონალურ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ელექტრონის მოძრაობისას სპინის პროექცია სიჩქარის მიმართულებაზე მოძრაობის ინტეგრალია.
შენარჩუნდება თუ არა ეს შედეგი სხვა ნებისმიერი $s = 1/2$ სპინიანი ნაწილაკისათვის?
მითითება: გამოიყენეთ წინა 11.19-ის შედეგები.
11.21*. აჩვენეთ, რომ დამუხტული, სპინიანი, მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ერთგვაროვან, დროში ცვალებად $\vec{H}(t)$ მაგნიტურ ველში მოძრაობისას (და ნებისმიერ ელექტრულ ველში) ტალღური ფუნქცია შესაძლოა ჩაიწეროს როგორც კოორდინატული ფუნქციისა და სპინური ფუნქციების ნამრავლი.
მითითება: გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (11.1) პაულის განტოლება.
11.22*. იპოვეთ $s = 1/2$ სპინიანი μ მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის სპინური ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება, და სპინის ვექტორის კომპონენტების საშუალო მნიშვნელობები, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან სტაციონალურ მაგნიტურ ველში.
მითითება: მიმართეთ z ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ და გამოიყენეთ წინა 11.21 ამოცანის შედეგები.
11.23. განაზოგადეთ წინა 11.22 ამოცანის შედეგები ზარასტაციონალური მაგნიტური ველის შემთხვევაში, რომლის მიმართულება უცვლელი რჩება ანუ $H(t) = H(t)\vec{n}_0$.
11.24*. $s = 1/2$ სპინიანი μ მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკი იმყოფება შემდეგი სახის ერთგვაროვან $H(t)$ მაგნიტურ ველში

$$H_x = H_1 \cos\omega_0 t;\ H_y = H_1 \sin\omega_0 t;\ H_z = H_0$$

სადაც $H_{0,1}, \omega_0$ მუდმივებია.
$t = 0$ მომენტში ნაწილაკი იმყოფება $s_z = 1/2$ მდგომარეობაში. იპოვეთ s_z-ის სხვადასხვა მნიშვნელობების პოვნის ალბათობები t მომენტში.
მითითება: დაწერეთ სრედინგერის განტოლება სპინური ტალღური ფუნქციის $\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$ $a(t)$ და $b(t)$ კომპონენტებისათვის. მიღებული

განტოლება $a=\exp\left\{-\frac{i\omega_0 t}{2}\right\}\tilde{a}$ და $b=\exp\left\{\frac{i\omega_0 t}{2}\right\}\tilde{b}$ ჩასმებით დაიყვანეთ მუდმივკოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე.

11.25. მაგნიტურ ველში მყოფი დამუხტული უსპინო ნაწილაკისათვის დაადგინეთ თანაფარდობა ორბიტალური მომენტისა l და მაგნიტური მომენტის μ საშუალოებს შორის.

11.26. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული უსპინო ნაწილაკისათვის (რომელიც იმყოფება Ψ_{nmp_z} სტაციონალურ მდგომარეობაში) იპოვეთ დენის სიმკვრივის ოპერატორი. (იხილეთ ამოცანა 11.7)

მითითება: გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (11.8) ფორმულა, რომელიც უსპინო ნაწილაკისათვის არის გამოსადეგი.

11.27. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული $s=1/2$ სპინიანი μ_0 მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება $\Psi_{nmp_z s_z}$ სტაციონალურ მდგომარეობაში, (იხილეთ ამოცანა 11.18).

მითითება: გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (11.7) ფორმულა.

11.28*. ელექტრონი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში ბირთვის კულონურ ველში. იპოვეთ ელექტრონის მიერ სივრცეში შექმნილი საშუალო მაგნიტური ველი.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ ძირითად მდგომარეობაში დენის გამოსახულებაში წვლილი შეაქვს მხოლოდ (11.9) სპინურ ნაწილს და გამოიყენეთ ელექტროდინამიკის ცნობილი ფორმულა ვეტორ-პოტენციალისათვის $\vec{A}(\vec{R})=\frac{1}{c}\int\frac{\vec{j}(\vec{r})dV}{\left|\vec{R}-\vec{r}\right|}$.

11.29*. კოორდინატთა სათავეში იპოვეთ საშუალო მაგნიტური ველი, რომელსაც ქმნის $s=1/2$ სპინიანი μ_0 მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკი, რომელიც იმყოფება ცენტრალურ ველში s მდგომარეობაში.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ ძირითად მდგომარეობაში დენის გამოსახულებაში წვლილი შეაქვს მხოლოდ (11.9) სპინურ ნაწილს, გამოიყენეთ წინა 11.28 ამოცანის ფორმულები და შემდეგი თანაფარდობა $\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{r})$.

პასუხები

1.1 წრფივი ოპრატორების თეორიის ძირითადი დებულებები

1.1. ყველა ოპერატორი წრფივია, გარდა $\hat{K}$ ოპერატორისა. ყველას გააჩნია შებრუნებული ოპერატორი:

$$\hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_{-a};\ \hat{I}^{-1} = I;\ \hat{M}_c^{-1};\ \hat{K}^{-1} = \hat{K};\ \hat{P}_{12}^{-1} = \hat{P}_{12}$$

1.10. $\hat{D}\Psi = \frac{d^3\Psi}{dx^3} + 3x\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(3x^2+3\right)\frac{d\Psi}{dx} + \left(x^3+3x\right)\Psi$

1.11. $\hat{L}\Psi = \frac{d^3\Psi}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2\Psi}{dx^2}$

1.12. ა) $\hat{A}\cos x = \left(2-x^2\right)\cos x - 4x\sin x;\quad \hat{B}\cos x = \left(1-x^2\right)\cos x - 3x\sin x$

ბ) $\hat{A}e^x = \left(2+4x+x^2\right)e^x;\ \hat{B}e^x = \left(1+3x+x^2\right)e^x$

1.13. $\hat{A} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx};\quad \hat{B} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + 3x\frac{d}{dx} + 1$

1.14. $\hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta + 2i\hbar\left(\vec{A}\nabla\right) + i\hbar div\vec{A} + \vec{A}^2$

1.15. ა) თუ გავშლით ექსპონენტას მწკრივად და გავითვალისწინებთ, რომ $\hat{I}^2 = 1$, მივიღებთ $\exp\left\{ia\hat{I}\right\} = \cos a + i(\sin a)\hat{I}$.

ბ) ადვილი საჩვენებელია, რომ $\hat{L}_a = \sum_n \frac{1}{n!}\left(ax\frac{d}{dx}\right)^n$ ოპერატორის მოქმედება x^k-ზე არის $\hat{L}_a x^k = \left(e^a x\right)^k$. ამიტომ თუ $\Psi(x)$ ფუნქციას გავშლით ტეილორის მწკრივად,მივიღებთ

$$\hat{L}_a\Psi(x) = \hat{L}_a\sum_n \frac{c_k}{k!}x^k = \sum_n \frac{c_k}{k!}\left(e^a x\right)^k = \Psi\left(e^a x\right)$$

1.16. განვსაზღროთ $\hat{T}_a$ ოპერატორი შემდეგი ტოლობით

$$\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x+a)$$

და გავშალოთ $\psi(x+a)$ მწკრივად

$$\psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\psi(x)$$

და რადგანაც $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$, საბოლოოდ გვექნება

$$\hat{T}_a = e^{a\frac{d}{dx}}$$

1.17. განვსაზღვროთ $\hat{T}_\alpha$ ოპერატორი ტოლობით

$$\hat{T}_a\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}+\vec{a})$$

თუ გავშლით $\psi(\vec{r}+\vec{a})$-ს ტეილორის მწკრივად $\vec{r}$-ის მახლობლად, მივიღებთ

$$\hat{T}_a = e^{\vec{a}\vec{\nabla}}$$

1.18. განვსაზღვროთ $\hat{T}_a$ ოპერატორი ტოლობით

$$\hat{T}_\alpha \psi(\varphi) = \psi(\varphi + \alpha)$$

თუ გავშლით $\psi(\varphi+\alpha)$-ს ტეილორის მწკრივად φ-ის მახლობლად, მივიღებთ

$$\hat{T}_\alpha = e^{\alpha \frac{d}{d\varphi}}$$

1.19. ტოლი იქნება.

1.23. $[\Delta, x] = 2\dfrac{d}{dx}$

1.24. $\hat{A} = \hat{L}\hat{M}^2 - M^2\hat{L} = 2\hat{M}$

1.25. წინა 1.24 ამოცანის შედეგის გამოყენებით, ინდუქციის მეთოდით შეიძლება დავამტკიცოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$\hat{M}\hat{L}^n - \hat{L}^n\hat{M} = -n\hat{L}^{n-1} \qquad (1)$$

განმარტების თანახმად

$$f(\hat{L}) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\hat{L}^n \qquad (2)$$

ამიტომ (1) და (2) – დან გვექნება

$$\hat{A} = f(\hat{L})\hat{M} - \hat{M}f(\hat{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\left(\hat{L}^n\hat{M} - \hat{M}\hat{L}^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!}\hat{L}^{n-1} \qquad (3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ $n-1 = n_1$, მაშინ (3)-დან მივიღებთ

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{f^{(n_1+1)}(0)}{n_1!}\hat{L}^{n_1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{[f'(0)]^{(n_1)}}{n_1!}\hat{L}^{n_1} = f'(\hat{L}) \qquad (4)$$

ამრიგად გვექნება

$$\hat{A} = f(\hat{L})\hat{M} - \hat{M}f(\hat{L}) = f'(\hat{L}) \qquad (5)$$

1.26. $n = m = 1$

1.27 ა) გავამრავლოთ $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$ ტოლობა $\hat{B}$ ოპერატორზე ჯერ მარცხნიდან, შემდეგ კი მარჯვნიდან. მივიღებთ $\hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2 = \hat{B}$ და $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}$.ამ ტოლობების შეკრებით მივიღებთ $\left[\hat{A}, \hat{B}^2\right] = 2\hat{B}$.

1.29. ზოგადად არ კომუტირებენ. მაგალითად, $\hat{p}_y$ ოპერატორი კომუტირებს x და $\hat{p}_x$ ოპერატორებთან, რომლებიც ერთმანეთთან არ კომუტირებენ.

1.37. $\left(\hat{A} - \lambda\hat{B}\right)^{-1} = \hat{A}^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\left(\hat{B}\hat{A}^{-1}\right)^n$

1.39. ა) $2i\hbar\hat{p}_x$; ბ) $2i\hbar x$;

1.40. ა) $2i\hbar(x\hat{p}_x + \hat{p}_x x)$ ბ) $6x + x^2\dfrac{d}{dx}$

1.44. გვაქვს

$$\Psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}a^n\frac{d^n}{dx^n}\Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n\hat{p}^n\Psi(x) = e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}}\Psi(x) \equiv \hat{T}(a)\Psi(x)$$

ცხადია, რომ $\hat{T}(a) = \exp(i\hat{p}a/\hbar)$ ტრანსლიაციის ოპერატორია,სადაც $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ იმპულსის ოპერატორია. ამიტომ პირდაპირ შეიძლება ჩვენება, რომ

$$\left[\hat{T}(a), \frac{1}{2m}\hat{p}^2\right] = 0 \qquad (1)$$

ხოლო

$$\begin{aligned}\left[\hat{T}(a), V(x)\right]\psi(x) &= \hat{T}(a)V(x)\psi(x) - V(x)\hat{T}(a)\psi(x) = \\ &= V(x+a)\psi(x+a) - V(x)\psi(x+a) = 0\end{aligned} \qquad (2)$$

რადგანაც ამოცანის პირობის$V(x+a) = V(x)$. (1) და (2)-დან აშკარად ჩანს ჰამილტონიანი კომუტირებს ტრანსლიაციის $\hat{T}(a)$ ოპერატორთან.

1.48. $\vec{a}$

1.49. $-\frac{i}{\hbar}\alpha x^{\alpha+\beta-1}$

1.50. $\left\{\frac{d}{dx}, f(x)\right\} = \frac{i}{\hbar}\frac{df}{dx}$

1.58. $\hat{A}^+ = -\frac{d}{dx}$

1.59. $\hat{A}^+ = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}$

1.60. $\hat{T}_{\vec{a}}^+ = \hat{T}_{-\vec{a}}$

1.61.

$$\left(e^{i\alpha\frac{d}{d\varphi}}\right)^+ = \left(e^{i\alpha\frac{d}{d\varphi}}\right)$$

1.62. რადგანაც $f(x,y,z)$ ფუნქციის ნამდვილობა ნიშნავს, რომ სრულდება პირობა $f = f^*$, ამიტომ დამტკიცება ცხადია.

1.72. დავუშვათ სამართლიანია

$$\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B} \qquad (1)$$

მაშინ

$$\hat{L}^+ = \hat{A} - i\hat{B} \qquad (2)$$

ამ ორი ტოლობიდან მივიღებთ

$$\hat{A} = \frac{\hat{L} + \hat{L}}{2};\ \hat{B} = \frac{\hat{L} - L^+}{2i} \qquad (3)$$

1.73. ჩავწეროთ $\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B}$,საიდანაც

$$\hat{L}^2 = \hat{A}^2 - \hat{B}^2 + i\left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right) \qquad (1)$$

ცხადია, რომ $\hat{L}^2$ ოპერატორი ერმიტული იქნება ($\hat{A}$ და $\hat{B}$ ოპერატორების ერმიტულობის გათვალისწინებით), როცა $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$.

1.2 საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. საშუალოს ცნება.პროექციული და უნიტარული ოპერატორები

1.76.ა)საკუთარი ფუნქციებია $\psi(x)=e^{i\beta x}$, სადაც β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ბ) საკუთარი ფუნქციებია $\psi(x)=e^{-i\lambda x}$, სადაც λ ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ორივე შემთხვევაში სპექტრი უწყვეტია.

1.77. საკუთარი ფუნქციებია $\psi(x)=ce^{\lambda x-\frac{x^2}{2}}$, სადაც c და λ ნებისმიერი რიცხვებია. ეს ამონახსნები აკმაყოფილებენ სასრულობის,უწყვეტობის და ცალსახობის მოთხოვნებს. სპექტრი უწყვეტია.

1.78. $\psi = Ce^{i\lambda x}$; $\lambda = \dfrac{2\pi n}{a}; n = \pm 1, \pm 2, \ldots$

1.79. საკუთარი ფუნქციებია $\psi(\varphi)=ce^{im\varphi}$, სადაც $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

1.80. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ამოხსნა საკუთარი ფუნქციების განტოლებისა

$$\sin\frac{d}{d\varphi}\psi = \lambda\psi \tag{1}$$

გავშალოთ $\sin\dfrac{d}{d\varphi}$ ოპერატორი მწკრივად

$$\sin\frac{d}{d\varphi}\psi = \left(\frac{d}{d\varphi} - \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{1}{5!}\frac{d^5}{d\varphi^5} - \ldots\right)\psi = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{d^{2k+1}}{d\varphi^{2k+1}}\psi \tag{2}$$

(1)-ის ამოხსნა (2)-ის გათვალისწინებით უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით $\psi(\varphi)=e^{\alpha\varphi}$ და ფუნქციის ცალსახობის პირობა მსგავსად წინა 1.79 ამოცანისა მოგვცემს $\alpha = im(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.ამ ამოხსნის ჩასმით (1) განტოლებაში მივიღებთ საკუთარი მნიშვნელობებს

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(im)^k = \sin(im)$$

1.81. ანალოგიურად 1.80 ამოცანისა გვექნება

$$\psi(\varphi)=e^{m\varphi}; \quad \lambda = \cos m; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

1.82. ანალოგიურად 1.80 ამოცანისა გვექნება

$$\psi(\varphi)=e^{m\varphi}; \quad \lambda = a^{-am}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

1.83. $\psi(x)=\dfrac{C\sin\beta x}{x}$,სადაც β ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

1.84. $A=-9$

185. ა) e^{ax}; ბ) e^{ax} და $\sin ax$

1.86. საკუთარი ფუნქციაა $\cos kx + \sin kx$, ხოლო საკუთარი მნიშვნელობაა $-k^2$.

1.87. ა) $A=4$; ბ) $A=1$

1.88. $A=-\alpha^2$

1.89. $A=k$

1.90. $\psi = C\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right);\ \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2;n = \pm1,\pm2,...$

1.91. ა) $f(x,y)\exp(ik_y y)$; ბ) $A\exp\left[i\left(k_x x + k_y y + k_z z\right)\right]$; გ) $f(y,z)\exp(\pm ik_x x)$

აქ $k_\gamma = \frac{p_\gamma}{\hbar}$; $\gamma = x,y,z$, ხოლო f ნებისმიერი ფუნქციაა.

1.97. საკუთარი ფუნქციაა $\psi(x) = e^{i\alpha}f(x)$, სადაც α ნებისმიერი ნამდვილი სიდიდეა, ხოლო $f(x)$ ნებისმიერი ნამდვილი ფუნქციაა.

1.100. ა) $\psi_1 = Ae^{ikx};\psi_2 = Be^{-ikx}$; სადაც $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, ხოლო E ენერგია-საკუთარი მნიშვნელობაა. ბ) $E_n = \frac{n^2\hbar^2}{2ma^2};\psi_n = C\sin\frac{n\pi}{a}x;\ n = 1,2,3...$; ტალღურ ფუნქციას ექნება $n-1$ კვანძი.

1.101. ა) $f_{1,2} = \pm c$; ბ) $f_1 = 0;\ f_2 = c$; გ) $f_1 = 0;\ f_{2,3} = \pm c$

1.102 საკუთარი ფუნქციაა $\Psi_f(x) = C\exp\left\{-\frac{i(\beta x - f)^2}{2\hbar\alpha\beta}\right\}$, ხოლო საკუთარი მნიშვნელობაა ნებისმიერი ნამდვილი f რიცხვი. სპექტრი უწყვეტია და გადაუგვარებელი.

105. ა) ოპერატორების არაკომუტატიურობა არ ნიშნავს,იმას რომ არ არსებობენ ისეთი მდგომარეობები, რომლებშიც შესაბამის ფიზიკურ სიდიდეებს ერთდროულად აქვთ განსაზღვრული მნიშვნელობები. ტუკი ასეთი მდგომარეობები არსებობენ, მათი ტალღური ფუნქციები არ ადგენენ სრულ სისტემას. მაგალითად, როგორც **III** თავში ვნახავთ იმპულსის მომენტის ოპერატორის კომპონენტები ერთმანეთთან არ კომუტირებენ, მაგრამ $L = 0$ მდგომარეობაში იმპულსის მომენტის კომპონენტებს გააჩნიათ $L_i = 0$ განსაზღვრული მნიშვნელობა (იხილეთ აგრეთვე 1.105 ამოცანა)

ბ) თუ ოპერატორები კომუტირებენ, ეს არ ნიშნავს, რომ თუ A-ს გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობები, B-საც აქვს გარკვეული მნიშვნელობები. მკაცრად შეიძლება ითქვას შემდეგი: მდგომარეობები, რომელშიც A და B-ს ერთდროულად აქვთ განსაზღვრული მნიშვნელობანი არსებობენ და ამგვარი მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები ადგენენ სრულ სისტემას. მაგალითი: ერთგანზომილებიანი მოძრაობისას $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ იმპულსის და კინეტიკური ენერგიის $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ ოპერატორები კომუტირებენ, მაგრამ $\psi(x) = C\sin\frac{p_0 x}{\hbar}$ მდგომარეობაში, კინეტიკურ ენერგიას გააჩნია განსაზღვრული მნიშვნელობა,იმპულსსკი არა. თუკი $\hat{A}$ ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობათა სპექტრი გადაუგვარებელია, მაშინ $\hat{A}$ ოპერატორთან კომუტირებად ნებისმიერ ოპერატორს Ψ_{A_i} მდგომარეობაში ასევე გააჩნია განსაზღვრული მნიშვნელობა (იხილეთ 1.104 ამოცანა)

1.106. $\left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right)\Psi_{ab}=(ab+ba)\Psi_{ab}=2ab\Psi_{ab}=0$. ამრიგად, $ab=0$ და ამიტომ ან a ან b ნულია.მაგალითი: $\hat{x}\hat{I}+\hat{I}\hat{x}=0$ და არსებობს მხოლოდ ერთი ტალღური ფუნქცია $\Psi_0=\delta(x)$, რომელიც ერთდროულად საკუთარი ფუნქციაა $\hat{x}$ და $\hat{I}$ ოპერატორების, ამავდროულად კოორდინატის საკუთარი მნიშვნელობაა $x_0=0$.

1.1.09.საკუთარი ფუნქციაა $\Psi_f(x)=C\exp\left\{\frac{(x-f)^2}{2}\right\}$.ეს ფუნქცია ნებისმიერი საკუთარი მნიშვნელობისთვის f, უსასრულოდ იზრდება $x\to\pm\infty$-თვის. ასეთი ფუნქციები კი გამოირიცხება განხილვიდან, რის გამოც ითვლება, რომ მოცემულ $\hat{f}$ ოპერატორს საერთოდ არ გააჩნია საკუთარი ფუნქცია.

1.110.საკუთარი ფუნქციაა $\Psi_f(x)=C\exp\left\{-\frac{(x-f)^2}{2}\right\}$.საკუთარი მნიშვნელობა f ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია.სხვადასხვა საკუთარი მნიშვნელობების შესაბამისი ტალღური ფუნქციები არ არიან ორთოგონალური.

1.111. ა) $\frac{d\phi_1-\phi_2}{\sqrt{1-d^2}}$; ბ) $\frac{\phi_1-\phi_2}{2-2d}$

1.112. $\langle x\rangle=\frac{b}{2}$; $\langle E_k\rangle=\frac{a^2\hbar^2}{5mb^2}$

1.113. ა) $k\hbar$ ბ) 0 გ) 0

1.116. ა) $\langle x\rangle=0$; $\langle p_x\rangle=\hbar k$

1.117. ა) $c_i=\int\varphi_i^{\bullet}\psi dx$; ბ) $|c_k|^2$ კოეფიციენტები A_k ფიზიკური სიდიდის პოვნის ალბათობებია $\psi(x)$ მდგომარეობაში.

1.118. $A^2=\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}$; $\langle x\rangle=a$; $\langle x^2\rangle=a^2+\frac{1}{4\lambda}$; $\sigma_x^2=\frac{1}{4\lambda}$

1.119. $A=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$ **;** $\langle U\rangle=-\frac{e^2}{a_0}$

1.120. $A=\sqrt{\lambda}$ **;** $\langle x\rangle=0$; $\langle x^2\rangle=\frac{1}{2\lambda^2}$; $\sigma_x=\frac{1}{\sqrt{2}\lambda}$; ალბათობა $W=1-e^{-\sqrt{2}}$

1.121. $A=\sqrt{\frac{2}{l}}$; $\langle x\rangle=\frac{l}{2}$; $\langle p_x\rangle=0$; $\langle E_k\rangle=\frac{2\hbar^2\pi^2}{4ml^2}$

1.122. $A^2=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $\langle x\rangle=0$; $\langle p_x\rangle=k\hbar$; $\langle E_k\rangle=\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{1}{a^2}-k^2\right)$

1.124. $\langle x\rangle=x_0$; $\langle x^2\rangle=\frac{a^2}{2}+x_0^2$; $\sigma_x=\frac{a^2}{2}$; $\langle p\rangle=p_0$; $\langle p^2\rangle=\frac{\hbar^2}{2a^2}+p_0^2$; $\sigma_p=\frac{\hbar^2}{2a^2}$

1.125. ა) $A=\sqrt{\frac{3}{b}}$; ბ) ნაწილაკის პოვნა ყველაზე დიდი ალბათობაა $x=a$

წერტილში; გ) ალბათობა ტოლია $P=\int_0^a |\Psi|^2 dx = \frac{a}{b}$; თუ $b=a$, $P=1$. თუ $b=2a$, $P=1/2$; დ) $\langle x\rangle = \frac{2a+b}{4}$;

1.127. ა) $\langle x_2\rangle = \langle x_1\rangle - a$; $\langle p_2\rangle = \langle p_1\rangle$. ბ) $\langle x_2\rangle = \langle x_1\rangle$; $\langle p_2\rangle = \langle p_1\rangle + p_0$

1.130. $\langle \hat{P}(f_i)\rangle = |C_i|^2$, სადაც C_i კოეფიციენტები მონაწილეობენ Ψ-ის გაშლაში Ψ_{f_k} ფუნქციებად $\Psi = \sum_k C_k \Psi_{f_k}$

1.131. $P_+ = \frac{1+I}{2}$; $P_- = \frac{1-I}{2}$, სადაც I კოორდინატთა ინვერსიის ოპერატორია.

1.133. $\hat{U}=1$

1.134. $|c|=1$ ანუ $c=\exp(i\alpha)$, სადაც α ნამდვილი რიცხვია.

1.136. შეიძლება თუ $\hat{U}^2=1$. ასეთ ერმიტულ ოპერატორს საკუთარი მნიშვნელობები აქვს მხოლოდ ორი: 1 და -1. ამრიგად თუ ერმიტულ ოპერატორს საკუთარი მნიშვნელობები აქვს ± 1, მაშინ ის უნიტარული ოპერატორიცაა.

1.138. $\hat{U} = \exp(i\hat{F}) = \exp(i\hat{F}/2)\left[\exp(-i\hat{F})\right]^{-1} = \frac{\cos(\hat{F}/2)+i\sin(\hat{F}/2)}{\cos(\hat{F}/2)-i\sin(\hat{F}/2)}$

2.1. დისკრეტული სპექტრი. სტაციონალური მდგომარეობები

2.2. არანორმირებული ტალღური ფუნქციაა $\Psi_E^{(\pm)}(x) = A_E^{(\pm)} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} px\right)$, სადაც $p=\sqrt{2mE}$ და $E \ge 0$. თავისუფალი მოძრაობა ინფინიტურია, რის გამოც სპექტრი უწყვეტია. გვაქვს სპექტრის ორჯერადი გადაგვარება.

2.4. ა) ამ შემთხვევაში არ გვაქვს ბმული მდგომარეობები. ბ) შემთხვევაში $x \to -\infty$ მხარეს $E - V(x)$ უარყოფითია და ამ ასიმპტოტურ არეში შრედინგერის განტოლების ორი დამოუკიდებელი ამოხსნიდან მხოლოდ ერთი შეესაბამება ბმულ მდგომარეობას გ) გვაქვს ბმული მდგომარეობები. თუ $V_+ = V = V_0$, მაშინ გვაქვს ბმული მდგომარეობები თუ $V_0 > E$.

2.6. ა) $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$; $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$; სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია.

ბ) $\psi(x) = Ce^{i\lambda x} + De^{-i\lambda x}$; $\lambda^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$; სადაც C და D ნებისმი;ერი მუდმივებია.

გ) $\psi(x) = Lx + M$; სადაც L და M ნებისმი;ერი მუდმივებია.

2.7. $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{2ma^2}$; $\Psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{\pi n x}{a}, \ 0 < x < a, \\ 0, \ x<0, \ x>a \end{cases}$ $n = 1.2,3...$

$x = a/2$ წერტილის მიმართ ინვერსიისას ტალღური ფუნქცია ასე გარდაიქმნება

$$\Psi'_n(x) \equiv \Psi_n(x') = \Psi_n(-x+a) = (-1)^n \Psi_n(x)$$

ანუ გააჩნია გარკვეული $(-1)^n$ ლუწობა. აქ აღებულია ისეთი ნუმერაცია დონეების, რომ სისტემის ძირითად მდგომარეობას შეესაბამება $n=1$. იმავდროულად $n-1$ ემთხვევა $\Psi_n(x)$ ფუნქციის ნულების რიცხვს.

2.9. $\langle x\rangle = \dfrac{a}{2}$; $\langle x^2\rangle = \dfrac{a^2}{3} - \dfrac{a^2}{2\pi^2(n+1)^2}$;

$$\sigma_x = \left\langle(\Delta x)^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2\pi^2(n+1)^2};$$

$$\langle p\rangle = 0; \quad \left\langle p^2\right\rangle = \frac{\pi^2\hbar^2(n+1)^2}{a^2}; \quad \sigma_p = \left\langle(\Delta p)^2\right\rangle = \left\langle p^2\right\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\pi^2\hbar^2(n+1)^2}{a^2}$$

2.10. $E = \dfrac{a\hbar^2}{4m}[\psi'(0)]^2$

2.12. $m = \dfrac{5\pi^2\hbar^2}{2a^2\Delta E}$.

2.13. $dN = \dfrac{a}{\pi\hbar}\sqrt{\dfrac{m}{2E}}dE$.

2.14. ა) $F = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{ma^3}$; ბ) $A = \dfrac{(\eta^2-1)\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

2.15. $w = \dfrac{2}{a}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2}\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}61$

2.16. $a = \dfrac{2}{P_m}$; $E = \dfrac{(\pi\hbar P_m)^2}{8m}$.

2.17. $w = \dfrac{64}{9\pi^2}$

2.19. შეიცვლება მხოლოდ დროითი ნაწილი სრული ტალღური ფუნქციის და რადგანაც ფიზიკური აზრი აქვს მხოლოდ ტალღური ფუნქციის მოდულის კვადრატს, დროითი მამრავლის ცვლილება არ გამოვლინდება.

2.20. $\Psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}$, $\omega = E/k$, $k = p/\hbar$

2.22. $\Psi(x,t) = \Psi'(x',t)e^{i(k_0 - \omega_0 t)}$, $\omega_0 = mv_0^2/2\hbar$, $k_0 = mv_0/\hbar$.აქ ექსპონენციალური მამრავლი აღწერს ნაწილაკის მოძრაობას K' სისტემასთან ერთად (K სისტემის მიმართ)

2.23. აკმაყოფილებს მხოლოდ შრედინგერის დრით განტოლებას.

2.24. $A = \sqrt{\dfrac{30}{a^5}}$; $\langle x\rangle = \dfrac{a}{2}$; $\langle p\rangle = 0$; $\langle H\rangle = \dfrac{5\hbar^2}{ma^2}$.

2.25. $\langle x\rangle = \dfrac{a}{2} - \dfrac{16a}{9\pi^2}\cos\left(3\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2a^2m}t\right)$

2.26

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_1 = Be^{-\alpha x};\ x>a\\ \psi_2 = C\sin\beta x + D\cos\beta x;\ |x|<a\\ \psi_3 = Fe^{\alpha x};\ x<a\end{cases} \qquad (1)$$

გვაქვს ორი ტიპის ამოხსნები, რომელთა საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებებია

ა) ლუწი ამოხსნები $C=0;\ B=F$

$$\beta tg\beta a=\alpha; \qquad (2)$$

სადაც $$\alpha=\left(\frac{2m}{\hbar^2}|E|\right)^{1/2}>0;\ \beta=\left(\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-|E|)\right)^{1/2}>0 \qquad (3)$$

ბ) კენტი ამოხსნები $D=0;\ B=-F$

$$\beta ctg\beta a=-\alpha; \qquad (4)$$

(2) და (4) ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერგიის დონეებს.

2.28. ა) $a^2U_0=\pi^2\hbar^2/4m$;

ბ) $a^2U_0=\dfrac{(n-1)^2\pi^2\hbar^2}{2m},\ n=2,3,...$

დონეთა რიცხვი განისაზღვრება შემდეგი უტოლობიდან

$$n>\frac{\sqrt{2ma^2U_0}}{\pi\hbar}>n-1$$

ჩვენს შემთხვევაში $n=4$

2.29. $E_1=\dfrac{\pi^2\hbar^2}{18ma^2}$

2.30. $U(x)=\dfrac{2\alpha^2\hbar^2x^2}{m};\ E=\dfrac{\alpha\hbar^2}{m}$

2.31. $U(x)=-\dfrac{\alpha\hbar^2}{mx};\ E=-\dfrac{\alpha^2\hbar^2}{2m}$

2.32.

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_1 = Be^{-\alpha x};\ x>a\\ \psi_2 = C\sin\beta x + D\cos\beta x;\ 0<x<a\\ \psi_3 = 0;\ x<0\end{cases} \qquad (1)$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$\beta ctg\beta a=-\alpha; \qquad (2)$$

სადაც $$\alpha=\left(\frac{2m}{\hbar^2}|E|\right)^{1/2}>0;\ \beta=\left(\frac{2m}{\hbar^2}(V_0-|E|)\right)^{1/2}>0 \qquad (3)$$

(2) ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერგიის დონეებს.

2.33.

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_1 = B_1 e^{-\beta_1 x};\ x>a\\ \psi_2 = A\sin(kx+\phi);\ 0<x<a\\ \psi_3 = B_2 e^{\beta_2 x};\ x<0\end{cases} \tag{1}$$

სადაც

$$k=\left(\frac{2m}{\hbar^2}E\right)^{1/2};\ \beta=\left(\frac{2m}{\hbar^2}(V_{1,2}-E)\right)^{1/2} \tag{2}$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$n\pi - aq\xi = \arcsin\xi + \arcsin(\xi\cos\gamma) \tag{3}$$

სადაც

$$q=\frac{(2mV_1)^{\frac{1}{2}}}{\hbar},\ \xi=\frac{k}{q}=\sqrt{\frac{E}{V_1}},\ \cos\gamma=\sqrt{\frac{V_1}{V_2}};\ \left(0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right) \tag{4}$$

(3) ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერგიის დონეებს.

2.34.

$$\psi(x)=\begin{cases}A_1\sin k_1 x; \quad 0<x<a\\ A_2\sin k_2 x + B_2\cos k_2 x;\ a<x<b\\ A_3(\sin k_3 x - tgk_3 c\cos k_3 x);\ b<x<c\end{cases} \tag{1}$$

სადაც

$$k_i=\left[\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_i)\right]^{\frac{1}{2}},\ i=1,2,3. \tag{2}$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$\begin{aligned}&k_3\cos k_3(c-b)[k_2\sin k_1 a\cos k_2(b-a)+k_1\cos k_1 a\sin k_2(b-a)]=\\ &=k_2\sin k_3(c-b)[k_2\sin k_1 a\sin k_2(b-a)-k_1\cos k_1 a\cos k(b-a)]\end{aligned} \tag{3}$$

(3) ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერგიის დონეებს.

2.35.

$$\psi(x)=\begin{cases}\psi_1 = A\sin k_1 x; \quad 0<x<a\\ \psi_2 = A\dfrac{\sin k_1 a}{\sin k_2(b-a)}\sin k_2(b-x);\ a<x<b\end{cases} \tag{1}$$

$$\frac{1}{A^2}=\frac{a}{2}\left[1-\frac{\sin 2k_1 a}{2k_1 a}+\frac{2k_2(b-a)-\sin 2k_2(b-a)}{2k_2 a\sin^2 k_2(b-a)}\sin^2 k_1 a\right] \tag{2}$$

$$w_1=\int_0^a \psi_1^2 dx=\frac{a}{2}\left(1-\frac{\sin 2k_1 a}{2k_1 a}\right)A^2;\ w_2=1-w_1 \tag{3}$$

2.36. ბ) $l^2 U_0 = \dfrac{(2n-1)^2\pi^2\hbar^2}{8m}$; ოთხი დონე.

2.37. ა) $\dfrac{l\sqrt{mU_0}}{\hbar}=\dfrac{3\pi}{4}$; ბ) $x=\dfrac{\pi}{2k}=\dfrac{2l}{3}$; გ) $w=\dfrac{2}{4+3\pi}$

2.39. ბ) შესაბამისად $l^2U_0 < 2{,}06\hbar^2/m$ და $2{,}06\hbar^2/m < l^2U_0 < 12{,}1\hbar^2/m$

2.41. $\Psi(x_0-0)=\Psi(x_0+0)$; $\Psi'(x_0-0)=\Psi'(x_0+0)$

2.42. $\Psi(x_0-0)=\Psi(x_0)=0;\quad \Psi(x>a)=0$

2.43. $\Delta\Psi'(x_0)=\Psi'(x_0+0)-\Psi'(x_0-0)=\dfrac{2m\alpha}{\hbar^2}\Psi(x_0);\;\; \Psi(x_0-0)=\Psi(x_0+0)$

2.44. გვაქვს ერთადერთი დონე

$$E_0=-\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2} \tag{1}$$

რომელსაც შეესაბამება ნორმირებული ტალღური ფუნქცია

$$\Psi_0(x)=\sqrt{\lambda_0}\exp[-\lambda_0|x|];\;\; \lambda_0=\frac{\alpha m}{\hbar^2} \tag{2}$$

2.45. $\langle T\rangle=-E_0;\,\langle U\rangle=2E_0;\;\; \Phi_0(p)=\dfrac{\sqrt{2\lambda_0^3\hbar^3}}{\sqrt{\pi}\left(p^2+\hbar^2\lambda_0^2\right)}$

2.46.ლუწი ამოხსნებია

$$\Psi(x)=A\sin[k(|x|-a)];\;\; k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}>0 \tag{1}$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$tgka=-\frac{k\hbar^2}{m\alpha} \tag{2}$$

კენტი ამოხსნებია

$$\Psi(x)=B\sin kx \tag{3}$$

ენერგეტიკული სპექტრი კი არის

$$E_n=\frac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2};\;\; n=1,2,... \tag{4}$$

2.47. ა)

$$\psi=\begin{cases}Ae^{ikx}+Be^{-ikx}; & (0\le x\le a)\\ Fe^{ikx} & (x>a)\end{cases}\qquad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \tag{1}$$

სასაზღვრო პირობებიდან k-თვის მიიღება განტოლება

$$i\frac{m\alpha}{\hbar^2k}\left(e^{2ika}-1\right)=1 \tag{2}$$

და

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \tag{3}$$

ბ) ტალღური ფუნქცია არ არის ნორმალიზირებული.

2.48.
$$E_n=-\frac{me^4}{2\hbar^2n^2};\; n=1,2,... \tag{1}$$

$$\psi_n(\xi)=e^{-\frac{\xi}{2}}\xi\sum_{k=0}^{n-1}a_{k+1}\xi^k;\quad \xi=2x\sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}};\; E<0 \tag{2}$$

2.49.
$$E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega,\;\; n=0,1,2... \tag{1}$$

$$\psi_n(x)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \tag{2}$$

სადაც $H_n(z)=(-1)^n e^{z^2}\dfrac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}$ ერმიტის პოლინომებია.

2.50. $E_k=\left(2n+\dfrac{3}{2}\right)\hbar\omega,\ n=0,1,2...$

2.51. $|a_n(p)|^2\dfrac{dp}{2\pi\hbar}=\dfrac{1}{2^n n!\sqrt{\pi m\omega\hbar}}e^{-\frac{p^2}{m\omega^2\hbar}}H_n^2\left(\dfrac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)dp$

2.52. $E_k=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega-\dfrac{e^2|\vec{E}|^2}{2m\omega^2},\ n=0,1,2...$

$$\psi_n=C_n e^{-\frac{\xi^2}{2}}H_n(\xi);\ \xi=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(x-\frac{e|\vec{E}|}{m\omega^2}\right)$$

2.53. ა) ψ_0 მდგომარეობა ლუწია, ψ_1 კი კენტი. ორივე მდგომარეობაში $\langle x\rangle=\langle p\rangle=0$

$\psi_0(n=0)$ –ში გვაქვს

$$\langle x^2\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega};\ \langle p^2\rangle=\frac{mh\omega}{2}$$

$\psi_1(n=1)$ –ში გვაქვს

$$\langle x^2\rangle=\frac{3\hbar}{2m\omega};\ \langle p^2\rangle=\frac{3mh\omega}{2}$$

ბ) $\psi_0(n=0)$ –ში გვაქვს

$\sigma_x\sigma_p=\dfrac{\hbar}{2}$; სადაც $\sigma_x^2=\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2$; $\sigma_p^2=\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2$

$\psi_1(n=1)$ –ში გვაქვს

$$\sigma_x\sigma_p=3\frac{\hbar}{2}>\frac{\hbar}{2}$$

გ) $\langle T\rangle=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\hbar\omega;\ n=0\\ \dfrac{3}{4}\hbar\omega;\ n=1\end{cases}$ $\qquad\langle V\rangle=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\hbar\omega;\ n=0\\ \dfrac{3}{4}\hbar\omega;\ n=1\end{cases}$

2.54. $\langle x^2\rangle_n=\dfrac{\hbar}{m\omega}\left(n+\dfrac{1}{2}\right);\ \langle V\rangle_n=\dfrac{\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}=\dfrac{E_n}{2}$

2.55. $\langle T_3\rangle=\dfrac{1}{2}\hbar\omega\left(3+\dfrac{1}{2}\right)$

2.56. $\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a}+\dfrac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^+-\dfrac{1}{2}\right)$

2.58. $E_n=\langle\psi_n|\hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a}+\dfrac{1}{2}\right)|\psi_n\rangle=\hbar\omega\left(n+\dfrac{1}{2}\right)$

2.59. 2.57 ამოცანის შედეგის თანახმად

$$\hat{a}\psi_0=0 \qquad (1)$$

საიდანაც

$$\psi_0 = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \qquad (2)$$

n-ე მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას მივიღებთ, თუ (2) ფუნქციაზე n ჯერ ვიმოქმედებთ $\hat{a}^+$ გაჩენის ოპერატორით და კვლავ გამოვიყენებთ 2.57 ამოცანის შედეგს $\hat{a}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$.

2.65. $H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$; $H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$;

$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$; $H_6(\xi) = 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120$;

2.66. $H_0(\xi) = 1; H_1(\xi) = 2\xi$; $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$

2.67. $\psi = Ce^{i\frac{PX_c}{\hbar}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi)$, სადაც $\xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$ და $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$,

$$E = \frac{P^2}{2(m_1 + m_2)} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \ (n = 0,1,2..)$$

2.68. $$\langle n|x|k\rangle = \begin{cases} i\sqrt{\frac{m\omega\hbar n}{2}}; \ k = n-1 \\ -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar(n+1)}{2}}; \ k = n+1 \end{cases};$$

ყველა სხვა შემთხვევაში $\langle n|x|k\rangle = 0$

$$\langle n|p|k\rangle = \begin{cases} i\sqrt{\frac{m\omega\hbar n}{2}}; \ k = n-1 \\ -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar(n+1)}{2}}; \ k = n+1 \end{cases}$$

ყველა სხვა შემთხვევაში $\langle n|p|k\rangle = 0$

2.69. $$E_n = -A\left[1 - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2mA}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2; \qquad (1)$$

(1)-ში n ნულიდან დაწყებული ღებულობს მთელ დადებით მნიშვნელობებს იმ მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე, რომლის დროსაც ჯერ კიდევ

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} > n + \frac{1}{2} \qquad (2)$$

ანუ დისკრეტული სპექტრი შეიცავს დონეების სასრულო რაოდენობას. როცა

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} < \frac{1}{2} \qquad (3)$$

დისკრეტული სპექტრი საერთოდ არ არსებობს.

ტალღური ფუნქციაა

$$\psi = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^s F(-n, 2s+1, \xi) \qquad (4)$$

სადაც

$$s=\frac{\sqrt{-2mE}}{\alpha\hbar}\,;\;\; n=\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar}-\left(s+\frac{1}{2}\right) \qquad (5)$$

ხოლო F გადაგვარებული ჰიპერგეომეტიული ფუნქციაა.

2.70. ტალღური ფუნქციაა

$$\psi=\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}F\left[\varepsilon-s,\varepsilon+s+1,\varepsilon+1;\frac{1-\xi}{2}\right] \qquad (1)$$

სადაც

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar\alpha};\;\frac{2mU_0}{\alpha^2\hbar^2}=s(s+1);\; s=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right) \qquad (2)$$

ხოლო F ჰიპერგეომეტიული ფუნქციაა.

$$E_n=-\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\left[-(1+2n)+\sqrt{1+\frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right]^2;\;\; n=0,1,2... \qquad (3)$$

არსებობს სასრული რაოდენობა დონეებისა, რომლებიც განისაზღვრება პირობიდან $\varepsilon>0$ ანუ $n<s$

2.71.

$$E_{2n}=\frac{V_0}{\lambda(\lambda-1)}(\lambda+2n)^2;\; E_{2n+1}=\frac{V_0}{\lambda(\lambda-1)}(\lambda+2n+1)^2;\; n=0,1,2...$$

$$\psi_{2n}=\cos^{\lambda}\alpha xF\left(\lambda+n,-n,\frac{1}{2};\sin^2\alpha x\right);\psi_{2n+1}=\cos^{\lambda}\alpha x\sin\alpha xF\left(\lambda+n+1,-n,\frac{3}{2};\sin^2\alpha x\right)$$

სადაც F ჰიპერგეომეტიული ფუნქციაა.

2.72. $E_n=\dfrac{\hbar^2\alpha^2}{2m}(\eta+\lambda+2n)^2 \quad n=0,1,2...$

$$\psi_n=\sin^{\eta}\alpha x\cos^{\lambda}\alpha xF\left(\eta+\lambda+n,-n,\eta+\frac{1}{2};\sin^2\alpha x\right)$$

სადაც F ჰიპერგეომეტიული ფუნქციაა.

2.73. ენერგია განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან

$$\sqrt{-E_n}+\sqrt{U_1-U_2-E_n}=\sqrt{U_1+\frac{\hbar^2}{8ma^2}}-\sqrt{\frac{h^2}{2ma^2}}\left(n+\frac{1}{2}\right),\; n=0,12...$$

$$\psi=c\frac{1}{(1-z)^{\varepsilon}}z^{\mu}F(\alpha,\beta,\gamma;z)$$

სადაც $\alpha=\mu-\varepsilon+\eta a;\;\beta=\mu-\varepsilon-\eta a;\eta=\left(-2mE/\hbar^2\right)^{\frac{1}{2}};\;\gamma=1+2\mu$,ხოლო F ჰიპერგეომეტიული ფუნქციაა.

2.74. ენერგეტიკული სპექტრი უწყვეტია,ხოლო ტალღური ფუნქციაა $\psi(\xi)=BAi(-\xi)$, სადაც $Ai(z)$ ე.წ.ეირის ფუნქციაა.

2.75. $\psi(p)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}\exp\left\{\dfrac{i}{\hbar F}\left(Ep-\dfrac{p^3}{6m}\right)\right\}$

2.76. $\Psi(z)=BAi\left[\left(z-\dfrac{E}{mg}\right)\left(\dfrac{2m^2g}{\hbar^2}\right)^{1/3}\right]$,სადაც $Ai(z)$ ე.წ.ეირის ფუნქციაა.

$$E_n = \left(\frac{mg^2\hbar^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \alpha_{n+1}, \; , n = 0,1,2...$$

სადაც α_{n+1} ეირის ფუნქციის ნულებია.

2.77. $$E_n = \frac{2\hbar}{a}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}\left\{n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2} + 1} - \sqrt{\frac{8mV_0a^2}{\hbar^2}}\right)\right\} \; n = 0,1,2...$$

$$\psi_n = C_n x^{\nu} e^{-\sqrt{\frac{mV_0}{2\hbar^2a^2}}x^2} F\left(-n, \nu + \frac{1}{2}; \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2 a^2}}x^2\right)$$

სადაც F გადაგვარებული ჰიპერგეომეტიული ფუნქციაა.

2.78. $$E_n = \left(n^2 + 4n\lambda - 2\lambda\right)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2} \quad n = 0,1,2,3,...$$

$$\psi_n = c_n\left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)^{-2\lambda} F\left(-\frac{n}{2} - 2\lambda, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}; \cos^2\frac{\pi x}{a}\right); \; n = 1,3,5...$$

$$\psi_n = c_n\left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)^{-2\lambda} \cos\frac{\pi x}{a} F\left(-\frac{n}{2} - 2\lambda + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \cos^2\frac{\pi x}{a}\right); \; n = 0,2,4...$$

2.79. $$\langle E\rangle = \sqrt{\frac{k}{2M}}\hbar; \; \left|\langle P_x\rangle\right| = \frac{\sqrt{\hbar\sqrt{\mu k}}}{\sqrt{\pi}}$$

2.2 უწყვეტი სპექტრის მდგომარეობები. პოტენციალურ ბარიერებში ნაწილაკის გასვლა

2.80. $$W(x) = 4a^2\sin^2 kx; \quad x_n = \frac{\pi\hbar n}{\sqrt{8mE}}; \; n = 1,3,5...$$

2.81. $$x_{eff} = \frac{1}{2\eta}; \; \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}.$$ ელექტრონისათვის $x_{eff} \approx 0{,}1$ ნმ

2.82. ბ) $$W(x \le 0) = 2a^2(1 - \sin 2kx); \; k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$W(\ge 0) = 2a_1^2 e^{-2\eta x}; \;\; \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

2.83. $$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}; \; k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar};$$

$$D = \frac{4k_1k_2}{(k_1 + k_2)^2};$$

2.86. ა) $R \approx 1 - 4\sqrt{\frac{E}{U_0}}$; ბ) $R \approx \left(\frac{U_0}{4E}\right)^2$

2.87. ა) $$D = \left(1 + \frac{U_0\sin^2 k_0 l}{4E(E + U_0)}\right)^{-1}; \; k_0 = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\hbar}$$

ბ) $D \approx 0{,}95$

2.88. $E = \dfrac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ml^2} - U_0$, სადაც n ისეთი მთელი რიცხვია, რომელთათვისაც $E > 0$. $E_{\min} = 14$ ევ. $(n = 2)$.

2.89. $l = \dfrac{(2n+1)\pi\hbar}{\sqrt{8m(E+U_0)}}$

2.90. ა) $D = \left(1 + \dfrac{U_0 \sin^2 k_0 l}{4E(E-U_0)}\right)^{-1}$; $k_0 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{\hbar}$.როცა $E \to U_0$,მაშინ

$$D = \left(1 + \frac{ml^2 U_0}{2\hbar^2}\right)^{-1}$$

ბ) $D = 1$ როცა $E = \dfrac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ml^2} + U_0$ და $E_1 = 11{,}5$ ევ, $E_2 = 16$ ევ.

2.91. ა) $D = \left(1 + \dfrac{U_0 sh^2 \eta l}{4E(U_0 - E)}\right)^{-1}$; $\eta = \dfrac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$

ბ) $D \ll 1$, როცა $\eta l \gg 1$ და ამ შემთხვევაში

$$D \approx 16 \frac{E}{U_0}\left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \exp\left(-2l\sqrt{2m(U_0 - E)}/\hbar\right)$$

გ) ელექტრონებისათვის $D \approx 0{,}27$, პროტონებისათვის $D \approx 10^{-47}$

2.92.

$$\frac{W(0)}{W(l)} = \frac{e^{2\eta l} + e^{-2\eta l}}{2}; \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

2.93. $R = \left(\dfrac{sh\dfrac{\pi}{\alpha}(k_1 - k_2)}{sh\dfrac{\pi}{\alpha}(k_1 + k_2)}\right)^2$; $k_1 = \dfrac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$, $k_2 = \dfrac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E-U_0)}$

$E = U_0$-თვის $R = 1$, ხოლო $E \to \infty$-თვის ნულისაკენ მიისწრაფვის შემდეგი კანონით

$$R = \left(\frac{\pi U_0}{\alpha\hbar}\right)^2 \frac{2m}{E} e^{-\frac{4\pi}{\alpha\hbar}\sqrt{2mE}}$$

ხოლო კლასიკურ ზღვარში $R \to 0$ როგორც მოსალოდნელი იყო.

2.94. $R = \left(\dfrac{sh\pi a(\eta - k)}{sh\pi a(\eta + k)}\right)^2$; $k = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$; $\eta = \dfrac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}$

2.95. $D = \dfrac{sh^2 \dfrac{\pi k}{\alpha}}{sh^2 \dfrac{\pi k}{\alpha} + \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{1 - \dfrac{8mU_0}{\hbar^2\alpha^2}}\right)}$; როცა $\dfrac{8mU_0}{\hbar^2\alpha^2} < 1$

$$D=\frac{sh^2\frac{\pi k}{\alpha}}{sh^2\frac{\pi k}{\alpha}+ch^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{8mU_0}{\hbar^2\alpha^2}-1}\right)};\quad \text{როცა}\ \frac{8mU_0}{\hbar^2\alpha^2}>1$$

2.96. $D\approx E$

2.97. $R=|A|^2;\quad A=\frac{m\alpha}{ik\hbar^2-m\alpha}.\qquad k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}>0$

$$D=|B|^2;\quad B=\frac{ik\hbar^2}{ik\hbar^2-m\alpha}.$$

2.98. ენერგია, რომლის დროსაც ნაწილაკი არ აირეკლება ბარიერიდან განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან

$$tg\kappa a=-\frac{k\hbar^2}{\alpha m};\ k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}>0$$

2.3. რამდენიმე თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემები

2.99. $E_{n_1\,n_2}=\frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_1^2}{a^2}+\frac{n_2^2}{b^2}\right)\quad n_{1,2}=1,2,3,...$

$$\Psi_{n_1\,n_2\,n_3}(x,y,z)=\sqrt{\frac{2}{ab}}\sin\left(\frac{\pi n_1}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n_2}{a}y\right)$$

2.100. $W=\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}\right)^2=0{,}038$

2.101. $E=2{,}5{,}8{,}10$, $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$ ერთეულებში.

2.102. $dN=\frac{ab}{2\pi\hbar^2}dE$

2.103. $E=\frac{\pi^2\hbar^2P_m}{4m}$

2.104. $E_n=-\frac{me^4Z^2}{2\hbar^2\left(n+|m|+\frac{1}{2}\right)^2};\ n=0,1,2,...;\ |m|=0,1,2,...$

$$\psi_{nm}(\rho,\varphi)=e^{im\varphi}\frac{1}{\sqrt{\rho}}e^{-\gamma\frac{\rho}{a}}\left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|+\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\frac{\rho}{a}\right)^k$$

2.105. $\psi_{n_1n_2}(x,y)=\psi_{n_1}(x)_{n_2}(y)$

$$E_N=\hbar\omega(N+1);\ N=0,1,2,...$$

სადაც $\psi_{n_1}(x)$ და $\psi_{n_2}(y)$ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორების ამონახსნებია, ხოლო $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}};\ N=n_1+n_2;\ n_{1,2}=0,1,2,...$

2.106. $E_{n_1 n_2} = \hbar\sqrt{\dfrac{k+\alpha}{m}}\left(n_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \hbar\sqrt{\dfrac{k-\alpha}{m}}\left(n_2 + \dfrac{1}{2}\right); \quad n_{1,2} = 0,1,2,...$

2.107. $E_{n_1 n_2} = \hbar\sqrt{\dfrac{k_1}{m}}\left(n_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \hbar\sqrt{\dfrac{k_2}{m}}\left(n_2 + \dfrac{1}{2}\right); \; n_{1,2} = 0,1,2,...$

2.108. $E_{n_1\, n_2\, n_3} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{n_1^2}{a^2} + \dfrac{n_2^2}{b^2} + \dfrac{n_3^2}{c^2}\right); \quad n_{1,2},3 = 0,1,2,...$

$$\Psi_{n_1\, n_2\, n_3}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\left(\frac{\pi n_1}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi n_2}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi n_3}{a}z\right)$$

2.109. $E = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^3\right); \; \Delta E_{34} = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}$

2.110. $dN = \dfrac{abcm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3}\sqrt{E}dE$

2.111. $E_{n_1 n_2} = \hbar\omega\left(n_1 + \dfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_1\left(n_2 + \dfrac{1}{2}\right)$,სადაც $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$ და $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{k+2k_1}{m}}$

$\psi_{n_1 n_2} = Ce^{-\frac{\xi^2}{2}}H_{n_1}(\xi)e^{-\frac{u^2}{2}}H_{n_2}(u)$, სადაც H_n ერმიტის პოლინომებია,ხოლო $\xi = \sqrt{\dfrac{\hbar}{M\omega}}X_C$ და $u = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_1}}x$

3. იმპულსის მომენტი

3.1. ა) $L_z = m\hbar; \, m = 0,\pm1,\pm2...; \; \psi_m = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$

ბ) $L_z^2 = m^2\hbar^2; \, m = 0,\pm1,\pm2...; \; \psi_m = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$

3.10. $\left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$

3.11. $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$

3.14. ა) ყველა კომუტატორი ნულია

ბ) ყველა კომუტატორი ტოლია $\left[\hat{l}_i, \hat{f}_k\right] = i\varepsilon_{ikl}\hat{f}_l$,სადაც $\hat{f}_k$ ოპერატორი არის $k-$ური პროექცია შესაბამისი ვექტორული ოპერატორისა.

გ) $\left[\hat{l}_i, \hat{f}_k\right] = i\left(\varepsilon_{ikp}\delta_{kp}\right)\hat{f}_{pn}$,სადაც $\hat{f}_{ik}$ ოპერატორი არის შესაბამისი მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტი.

3.20. $\Psi_{r_0 lm} = \dfrac{1}{r_0}\delta(r - r_0)Y_{lm}(\theta,\varphi)$

3.21. $\Psi_{p,m}(\vec{r}) = (2\pi\hbar)^{-1/2}e^{ip_z z/\hbar}(2\pi)^{-1/2}e^{im\varphi}f(\rho)$, სადაც $f(\rho)$ ნებისმიერი ფუნქციაა ρ ცვლადის ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში.

3.22. არ შეიძლება.

3.23. $\left\langle l_z^2 \right\rangle = \dfrac{4\hbar^2}{3}$

3.25. $A_l^m = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}$

3.27. $\left\langle \hat{l}_x^2 \right\rangle = \left\langle l_y^2 \right\rangle = \left[l(l+1)-m^2\right]/2$

3.28. $\left\langle l_z^2 \right\rangle = \dfrac{4\hbar^2}{3}$

3.29. $\left\langle (\Delta\varphi)^2 \right\rangle = \left\langle \varphi^2 \right\rangle - \left\langle \varphi \right\rangle^2 = \dfrac{\pi^2}{3} - \dfrac{1}{2}$; $\left\langle (\Delta L_z)^2 \right\rangle = \left\langle L_z^2 \right\rangle = \hbar^2$

3.31. $\left\langle L^2 \right\rangle = 2\hbar^2$

4.1. დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები

4.1. $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mr_0^2}n^2$; $\quad \psi_n(r) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi r_0}}\dfrac{\sin kr}{r}$

4.2. $r_{\max} = r_0/2$; $W = 1/2$

4.3. $\langle r \rangle = r_0/2$; $\left\langle r^2 \right\rangle = \dfrac{r_0^2}{3}\left(1 - \dfrac{3}{2\pi^2 n^2}\right)$; $\left\langle (r - \langle r \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle r^2 \right\rangle - \langle r \rangle^2 = \dfrac{r_0^2}{12}\left(1 - 6/\pi^2 n^2\right)$

4.4. $R_1(r) = R_0'(r) = \dfrac{A}{r^2}\left[kr\cos kr - \sin kr\right]$,სადაც A ნორმირების მუდმივაა.

4.5. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა $tgkr_0 = kr_0$, რომლის მინიმალური ამონახსნია $kr_0 = 4{,}5$,საიდანაც $E_{1p} \approx 10\hbar^2/mr_0^2 = 2E_1$.

4.6. ა) $\sin kr_0 = \pm\sqrt{\dfrac{\hbar^2}{2mr_0^2}U}\,kr_0$

ბ) $\dfrac{\pi^2\hbar^2}{8m} < r_0^2 U_0 < \dfrac{9\pi^2\hbar^2}{8m}$

4.7. $r_{\max} = \dfrac{3r_0}{4}$; $W = 0{,}34$.

4.8. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$\frac{\hbar^2\eta}{m\alpha} = 1 - e^{-2\eta a}, \quad \eta = \sqrt{-\frac{2mE_{n_r 0}}{\hbar^2}} \qquad (1)$$

(1) განტოლებას $\xi = \dfrac{m\alpha a}{\hbar^2} < 1/2$-თვის არ გააჩნია ფესვები და ამიტომ არ არსებობს ბმული მდგომარეობა,ხოლო როცა $\xi => 1/2$,მაშინ გვაქვს მხოლოდ ერთი დონე.

4.9. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$J_{2\eta a}\left(\sqrt{\frac{8mU_0 a^2}{\hbar^2}}\right) = 0; \quad \eta = \sqrt{-\frac{2mE_{n_r 0}}{\hbar^2}}$$

სადაც $J_{2\eta a}(x)$ ბესელის ფუნქციაა.

4.10. $E_{n_r 0}=-\frac{\hbar^2}{8ma^2(n_r+1)^2}\left[\lambda^2-(n_r+1)^2\right]^2$,სადაც $n_r=0,1,2...$, $n_r<\lambda-1$;

$\lambda=\left(\frac{2ma^2U_0}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$;

4.11. ა) $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$; ბ) ნაწილაკი თავისუფალია.

4.12. $\chi_{n_r l}(r)=CJ_{l+1/2}(\eta_{n_r l}r)$, სადაც $J_{l+1/2}(x)$ ბესელის ფუნქციაა.

$E_{n_r l}=\frac{\hbar^2\alpha^2_{n_r+1,l}}{2ma^2}$, სადაც $\alpha_{nl}>0$, n-ე ნულია (ზრდის მიხედვით, $x=0$ წერტილში ნულის ჩაუთვლელად) $J_{l+1/2}(x)$ ბესელის ფუნქციისა ანუ $J_{l+1/2}(\alpha_{nl})=0$. კერძოდ, ძირითად მდგომარეობას $(n_r=0, l=0)$ შეესაბამება $\alpha_{10}=\pi$ $\left(J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\right)$.

4.13. $dW=\frac{a\hbar^3}{p^2}\frac{\sin^2(pa/\hbar)}{(\pi^2\hbar^2-p^2a^2)^2}d\vec{p}$

4.14. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

; $E_{n_r l}=-\frac{\hbar^2\eta^2_{n_r l}}{2m}<0$

დისკრეტული დონეების პოვნის პირობა ნებისმიერი l-თვის შემდეგი პირობით მოიცემა

$$\frac{ma\alpha}{\hbar^2}-\frac{1}{2}<N<\frac{ma\alpha}{\hbar^2}+\frac{1}{2}$$

სადაც N დისკრეტული სპექტრის დონეების რიცხვია.

4.15. ა) $R(r)\approx\frac{1}{r}e^{-\eta r}$; $\eta=\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$; ბ) $R(r)\approx r^l$

4.16. ა) $a=\alpha=-\frac{1}{2r_1}$,სადაც $r_1=\frac{\hbar^2}{me^2}$ ბორის პირველი რადიუსია ბ) $A=\frac{1}{\sqrt{8\pi r_1^3}}$

4.17. ა) $\langle r^n\rangle=\frac{(n+2)!}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^n$ ბ) $\langle T\rangle=\frac{e^2}{2a}$; $\langle U\rangle=-\frac{e^2}{a}$

4.18. $j_r=j_\theta=0$; $j_\varphi=\frac{\hbar m}{\mu r\sin\theta}|\psi_{nlm}|^2$

4.19. $E_{nn_1n_2}=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{\hbar^2n_1^2\pi^2}{8ma^2}+\frac{\hbar^2n_2^2\pi^2}{8mb^2}$; $A^2=\frac{4}{ab}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar\pi}}\frac{1}{2^n n!}$; $n=0,1,2...$ $n_{1,2}=1,2...$

4.21. ტალღური ფუნქციაა $\psi = F(R_C)\Phi(r)$, სადაც $F = e^{i\frac{\vec{P}\vec{R}_C}{\hbar}}$ და $\Phi(r)$ წყალბადის ატომის ტალღური ფუნქციაა ბირთვის მოძრაობის გაუთვალისწინებლად.

$$E_{n,\vec{P}} = \frac{\vec{P}^2}{2(m+M)} - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2} \qquad (1)$$

(1)-ში $\vec{P}$ უწყვეტი ცვლადია, $\mu = \frac{mM}{m+M}$ დაყვანილი მასაა, ხოლო m და M ელექტრონის და ბირთვის მასებია.

4.22. $g_{10}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{4p}{\left(1+p^2\right)^2}$; $g_{20}(p) = \frac{32}{\sqrt{\pi}}\frac{p\left(1-4p^2\right)}{\left(1+4p^2\right)^3}$; $g_{21}(p) = -i\frac{128}{\sqrt{3\pi}}\frac{p^2}{\left(1+4p^2\right)^3}$;

4.24. ა) $\rho_1 = 3-\sqrt{5} \approx 0{,}76$; $\rho_2 = 3+\sqrt{5} \approx 5{,}24$; ბ) $\rho_2 = 2$

4.26. $W = 0{,}01$

4.27. $E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar\omega_1\left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_2\left(n_2 + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_3\left(n_3 + \frac{1}{2}\right)$ $n_{1,2,3} = 0,1,2\ldots$;

$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m}$ $(i = 1,2,3\ldots)$

4.28. $\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x,y,z) = \psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(y)\psi_{n_3}(z)$; $n_{1,2,3} = 0,1,2,\ldots$, სადაც $\psi_{n_i}(x_i)$; $i = 1,2,3$ **II** თავში განხილული ერთგანზომილებიანი ოსცილატორული ტალღური ფუნქციებია.

$$E_N = \hbar\omega(N+3/2);\ N = n_1 + n_2 + n_3;\ N = 0,1,2,\ldots$$

დონეების გადაგვარების ჯერადობა ტოლია

$$G(N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

4.29. $E_{n_r l} = \hbar\omega(l + 2n_r + 3/2) = \hbar\omega(N+3/2)$; $N = 2n_r + l = 0,1,2,..$

$\Psi_{n_r lm}(r,\theta,\varphi) = Cr^l \exp\left(-m\omega r^2/2\hbar\right)F\left(-n_r, l+3/2, m\omega r^2/\hbar\right)Y_{lm}(\theta,\varphi)$, სადაც F გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

4.31. $E_p = -\frac{2B^2 m}{\hbar^2}\left[2p + 1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}}\right]^{-2}$; $p = 0,1,2,\ldots$

4.32. $E_n = \hbar\sqrt{\frac{B}{2m}}\left[4n + 2 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}}\right]$; $n = 0,1,2,\ldots$

4.33. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$\frac{kR}{\eta R} = -tg\left[kR - \sum_{n=1}^{\infty}\left(arctg\frac{2ka}{n} - 2arctg\frac{ka}{n+\eta a}\right)\right] \qquad (1)$$

სადაც

$$k = \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(V_0 - |E|\right)\right]^{\frac{1}{2}};\ \eta = \left[\frac{2m}{\hbar^2}V_0\right]^{\frac{1}{2}}$$

$a << R$ ზღვარში შედარებით მარტივდება.

4.34. მე-N-დონის გაჩენის პირობაა

ა) და ბ) –თვის $\frac{m\alpha}{\hbar^2 a^2}=\frac{\pi^2 N^2}{2}$

გ) $\sqrt{1+\frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2}}=2N$

4.35. მე-N დონის გაჩენის პირობაა

ა) $\frac{2}{s-2}\left(\frac{2m\alpha}{\hbar^2 a^{s-2}}\right)^{\frac{1}{2}}=x_{\nu N;}\ \nu=\frac{1}{s-2}$, სადაც $x_{\nu N}$ არის $J_\nu(x)$ ბესელის ფუნქციის მე-N ნული.

ბ) $2(\nu+1)\left(\frac{2m\alpha a^{2-s}}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}=x_{\nu N;}\ \nu=-1+\frac{1}{2-s}$, სადაც $x_{\nu N}$ არის $J_\nu(x)$ ბესელის ფუნქციის მე-N ნული.

4.36. ა) ერთადერთი l მომენტის მქონე გაჩენის პირობაა

$$\frac{2m\alpha a}{\hbar^2}=2l+1$$

ბ) $\frac{\sqrt{2m\alpha/\hbar^2}}{a}=x_{l+1/2,N}$, სადაც $x_{l+1/2,N}$ არის $J_{l+1/2}(x)$ ბესელის ფუნქციის მე-N ნული.

4.2. აქსიალური სიმეტრიის მქონე სისტემები

4.40. $\Psi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi};\ m=0,\pm1,\pm2,...$

$E_m=\frac{\hbar^2 m^2}{2I}$. ძირითადის გარდა ყველა დონე ორჯერადაა გადაგვარებული.

4.41. $W(m)=\frac{n!}{2^n(2n-1)!!}\left[C_n^{\frac{n-m}{2}}\right]^2,\ m=n,n-2,...,-n$

$W(E_m)=2W(m)$

$\langle m\rangle=0$; $\langle E\rangle=\frac{n^2\hbar^2}{2I(2n-1)}$

4.42. $E_l=\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$; $\Psi_{lm}(\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi)$; $l=0,1,...;m=l,l-1,...-l$ ძირითადის გარდა ყველა დონე $2l+1$-ჯერაა გადაგვარებული.

4.43. როტატორის მომენტმა მხოლოდ ორი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $l=0$ და $l=2$ შემდეგი ალბათობებით

$W(l=0)=5/9$; $W(l=2)=4/9$; $\langle E\rangle=\frac{4\hbar^2}{3I}$

4.44. $\Psi_{n_1 n_2}(x,y)=\psi_{n_1}(x)\psi_{n_2}(y)$; $n_{1,2}=0,1,2,\ldots$, სადაც $\psi_{n_i}(x_i)$; $i=1,2$ **II** თავში განხილული ერთგანზომილებიანი ოსცილატორული ტალღური ფუნქციებია.

$$E_N=\hbar\omega(N+1);\ \omega=\sqrt{\frac{k}{m}};\ N=n_1+n_2;\ N=0,1,2,\ldots$$

დონეების გადაგვარების ჯერადობაა $N+1$.

4.45. იმპულსის მომენტის პროექციამ მხოლოდ ორი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს $m=\pm 2$ ერთიდაიგივე $W=1/2$ ალბათობით.

4.46. $E_{n_\rho|m|p_z}=E_{n_\rho|m|}+\dfrac{p_z^2}{2m}$;

$$\Psi_{n_\rho m p_z}=\frac{1}{\sqrt{4\pi^2\hbar}}\exp\left[i\left(\frac{p_z z}{\hbar}+m\varphi\right)\right]\psi_{n_\rho|m|}(\rho)$$

სადაც $E_{n_\rho|m|}$ და $\psi_{n_\rho|m|}(\rho)$ შესაბამისად ‘‘განივი’’ მოძრაობის ენერგია და ტალღური ფუნქციაა.

4.47. $E_{n_\rho|m|}=\dfrac{\hbar^2\alpha^2_{n_\rho+1}}{2ma^2}$, სადაც $\alpha_{km}>0$ ბესელის $J_m(x)$ ფუნქციის k-ური ნულია $J_m(\alpha_{km})=0$.

$$\psi_{n_\rho|m|}(\rho)=CJ_m\left(\eta_{n_\rho|m|}\rho\right)\ ;\quad \eta_{n_\rho|m|}=\sqrt{\frac{2mE_{n_\rho|m|}}{\hbar^2}}$$

4.48.

$$\chi_{n_\rho m}(\rho)=\begin{cases} C_1 J_{|m|}\left(\sqrt{2\mu\left(U_0-\left|E_{n_\rho|m|}\right|\right)/\hbar^2}\,\rho\right);\ \rho<a \\ C_2 K_{|m|}\left(\sqrt{2\mu\left|E_{n_\rho|m|}\right|/\hbar^2}\,\rho\right);\ \rho>a\end{cases} \tag{1}$$

სადაც $J_m(x)$ და $K_m(x)$ შესაბამისად ბესელის და მაკდონალდსის ფუნქციებია.

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$\begin{aligned}&\sqrt{\left|E_{n_\rho|m|}\right|}J_{|m|}\left(\sqrt{2\mu\left(U_0-\left|E_{n_\rho|m|}\right|\right)a^2/\hbar^2}\right)\times K'_{|m|}\left(\sqrt{2\mu\left|E_{n_\rho|m|}\right|a^2/\hbar^2}\right)=\\&=\sqrt{U_0-\left|E_{n_\rho|m|}\right|}\times J'_{|m|}\left(\sqrt{2\mu\left(U_0-\left|E_{n_\rho|m|}\right|\right)a^2/\hbar^2}\right)\times K_{|m|}\left(\sqrt{2\mu\left|E_{n_\rho|m|}\right|a^2/\hbar^2}\right)\end{aligned} \tag{2}$$

მცირე სიღრმის $\xi=\dfrac{ma^2U_0}{\hbar^2}<<1$ ორმოს შემთხვევაში გვაქვს ერთადერთი დონე

$$E_{00}\approx -2U_0\xi^{-1}\exp\left(-\frac{2}{\xi}\right) \tag{3}$$

4.49. მცირე სიღრმის $\dfrac{ma^2U_0}{\hbar^2}<<1$ ორმოს შემთხვევაში $m\neq 0$-თვის არ გვაქვს დონეები. დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობაა

$$J_{|m|-1}\left(\sqrt{2\xi}\right)=0\,;\xi=\frac{ma^2U_0}{\hbar^2}<<1$$

4.50.

$$\chi_{n_\rho m}(\rho)=\begin{cases}C_1 I_m\left(\eta_{n_\upsilon m}\rho\right); \ \rho<a\\ C_2 K_m\left(\eta_{n_\upsilon m}\rho\right); \ \rho>a\end{cases}; \qquad \eta_{n_\upsilon m}=\sqrt{2\mu\left|E_{n_\rho|m|}\right|/\hbar^2} \qquad \textbf{(1)}$$

სადაც $I_m(x)$ და $K_m(x)$ შესაბამისად მოდიცირებული ბესელის და მაკდონალდსის ფუნქციებია.

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$K_m\left(\eta_{n_\upsilon m}a\right)I_m\left(\eta_{n_\upsilon m}a\right)=\frac{\hbar^2}{2\mu\alpha a} \qquad (2)$$

მცირე სირღმის ორმოში $\xi=\frac{m\alpha a}{\hbar^2}<<1$ გვაქვს დონე

$$E_{00}\approx-\frac{2\hbar^2}{\mu a^2}e^{-\frac{1}{\xi}} \qquad (3)$$

ხოლო ღრმა ორმოში $\xi=\frac{m\alpha a}{\hbar^2}>>1$ გვაქვს დონე

$$E_{00}\approx-\frac{\mu\alpha^2}{\mu\hbar^2} \qquad (4)$$

4.51. დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობაა

$$\frac{\mu a\alpha}{\hbar^2}>|m|$$

5. მდგომარეობის ცვლილება დროში

5.6. $\hat{\vec{v}}=\frac{1}{m}\left(\hat{\vec{p}}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)$

5.7. $\hat{\vec{w}}=\dot{\hat{\vec{v}}}=\frac{e}{m}\varepsilon+\frac{e}{2cm}\left\{\left[\hat{\vec{v}}\vec{\mathrm{H}}\right]-\left[\vec{\mathrm{H}}\hat{\vec{v}}\right]\right\};\ \varepsilon=-\nabla\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t};\ \vec{\mathrm{H}}=rot\vec{A}$

5.12. $\frac{d}{dt}\int_V\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2dV=-\oint_S\vec{j}d\vec{s}+\frac{2}{\hbar}\int_V U_1(\vec{r})\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2dV$ (1)

(1)-დან ჩანს, რომ $U_1>0$ ხდება ნაწილაკების რიცხვის გაზრდა, ხოლო $U_1<0$-თვის კლება.

5.13. $\Psi(x,t)=\frac{A}{4}\exp\left(-\frac{i\hbar\pi^2t}{2ma^2}\right)\left\{3\sin\frac{\pi x}{a}-\exp\left(-\frac{4i\hbar\pi^2t}{ma^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{a}\right\};$

$T=\frac{ma^2}{2\pi\hbar}$ დროის შემდეგ სისტემა საწყისს მდგომარეობას უბრუნდება.

5.14. $\Psi(\varphi,t)=\frac{A}{2}\left[1-\exp\left(-\frac{2i\hbar t}{I}\right)\cos2\varphi\right]$

$T = \frac{\pi I}{\hbar}$ დროის შემდეგ როტატორი საწყისს მდგომარეობას უბრუნდება.

5.15. $\Psi(\theta, t) = \frac{A}{3}\left\{1 + \left(3\cos^2\theta - 1\right)\exp\left(-\frac{3i\hbar t}{I}\right)\right\}$

$T = \frac{2\pi I}{3\hbar}$ დროის შემდეგ როტატორი საწყისს მდგომარეობას უბრუნდება.

5.16. $\Psi(x,t) = A\left[1 + \frac{it\hbar}{ma^2}\right]^{-1/2}\exp\left[\frac{-ma^2\hbar^2(x - v_0t)^2 + i\hbar^3x^2t + ia^4m^2v_0\hbar(2x - v_0t)}{2m\left(a^4\hbar^2 + t^2\hbar^4/m^2\right)}\right]$

$|A|^2 = \left(\pi a^2\right)^{-1/2}$; $\langle x(t)\rangle = v_0 t$; $\langle p(t)\rangle = mv_0$

5.17. $\Psi(x,t) \approx \sqrt{\frac{m}{it}}\Phi_0\left(\frac{mx}{t}\right)e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}}$

5.20. $\hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{t}{m}\hat{p}$; $\hat{p}(t) = \hat{p}$

5.21. $\hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{t}{m}\hat{p} + \frac{F_0t^2}{2m}$; $\hat{p}(t) = \hat{p} + \frac{F_0t}{m}$

5.22. $\hat{x}(t) = \hat{x}\cos\omega t + \frac{\hat{p}}{m\omega}\sin\omega t$; $\hat{p}(t) = \hat{p}\cos\omega t - m\omega\hat{x}\sin\omega t$

5.23. ა) თავისუფალი ნაწილაკისათვის

$$\langle x(t)\rangle = x_0 + \frac{p_0t}{m};\ \langle p(t)\rangle = p_0;\ \left\langle[\Delta x(t)]^2\right\rangle = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\hbar^2t^2}{m^2a^4}\right);\ \left\langle[\Delta p(t)]^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2}$$

ბ) ერთგვაროვან ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის

$$\langle x(t)\rangle = x_0 + \frac{p_0t}{m} + \frac{F_0t^2}{2m};\ \langle p(t)\rangle = p_0 + \frac{F_0t}{m};\ \left\langle[\Delta x(t)]^2\right\rangle = \frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{\hbar^2t^2}{m^2a^4}\right);$$

$$\left\langle[\Delta p(t)]^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2};$$

გ) ოსცილატორისათვის

$$\langle x(t)\rangle = x_0\cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t;\quad \langle p(t)\rangle = p_0\cos\omega t - m\omega x_0\sin\omega t;$$

$$\left\langle[\Delta x(t)]^2\right\rangle = \frac{a^2}{2}\left(\cos^2\omega t + \frac{\hbar^2\sin^2\omega t}{m^2\omega^2a^4}\right);$$

$$\left\langle[\Delta p(t)]^2\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2}\left(\cos^2\omega t + \frac{m^2\omega^2a^4\sin^2\omega t}{\hbar^2}\right);$$

5.25. ა) თავისუფალი ნაწილაკისათვის

$$\left[\hat{p}(t), \hat{x}(t')\right] = -i\hbar$$

ბ) ერთგვაროვან ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის

$$\left[\hat{p}(t), \hat{x}(t')\right] = -i\hbar$$

გ) ოსცილატორისათვის

$$\left[\hat{p}(t), \hat{x}(t')\right] = -i\hbar\cos\omega(t - t')$$

5.26. $\langle E(+\infty)\rangle - \langle E(-\infty)\rangle = \frac{1}{m}\langle \vec{p}(-\infty)\rangle \int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(t)dt + \frac{1}{2m}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(t)dt\right]^2$

5.27. უნიტარული ოპერატორია

$$\hat{U} = \exp\{iS(x,t)\} \quad (1)$$

სადაც

$$S(x,t) = -\frac{mVx}{\hbar} + \frac{mV^2 t}{2\hbar} \quad (2)$$

ტალღური ფუნქცია კოორდინატულ წარმოდგენაში შემდეგნაირად გარდაიქმნება

$$\Psi'(x',t) = \exp\{iS(x,t)\}\Psi(x,t) \quad (3)$$

ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში შემდეგნაირად გარდაიქმნება

$$\Phi'(p',t) = \Phi(p = p' + mV, t)\exp\left(-\frac{imV^2 t}{2\hbar} + \frac{ipVt}{\hbar}\right) \quad (4)$$

5.28. უნიტარული ოპერატორია

$$\hat{U} = \exp\{iS(\vec{r},t)\} \quad (1)$$

სადაც

$$S(\vec{r},t) = \frac{e}{\hbar c} f(\vec{r},t) \quad (2)$$

და $f(\vec{r},t)$ ელექტრომაგნიტური ველების ყალიბრულ გარდაქმნაში მონაწილე ფუნქციაა ანუ

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f(\vec{r},t); \ \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r},t) \quad (3)$$

5.29. $\hat{x}(t) = \hat{x}\cos\omega t + \frac{\hat{p}_x}{m\omega}\sin\omega t + \frac{\hat{p}_y}{m\omega}(1 - \cos\omega t)$

$$\hat{p}_x(t) = \hat{p}_x \cos\omega t + \hat{p}_y \sin\omega t - m\omega\hat{x}\sin\omega t$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y} - \hat{x}\sin\omega t + \frac{\hat{p}_x}{m\omega}(\cos\omega t - 1) + \frac{\hat{p}_y}{m\omega}\sin\omega t$$

$$\hat{p}_y(t) = \hat{p}_y; \ \hat{z}(t) = \hat{z} + \frac{i\hat{p}_z}{m}; \ \hat{p}_z(t) = \hat{p}_z$$

სადაც

$$\omega = \frac{eH_0}{mc}$$

5.30. თუ აღნიშნული სისტემების ჰამილტონიანებში $\hat{H}(t) = \hat{H}(\hat{p}(t), \hat{x}(t))$ ჩავსვამთ $\hat{p}(t)$ და $\hat{x}(t)$ ოპერატორების ცხად სახეს, მივიღებთ, რომ $\hat{H}(t) = \hat{H}(0)$

5.31. ა) ყველა სიდიდე ინახება დროში

ბ) დროში ინახება E, p_x, p_y და L_z

გ) დროში ინახება E, L_x, L_y, L_z და L^2

დ) დროში ინახება p_x, p_y და L_z

5.33. შეიცვლება მხოლოდ სრული ტალღური ფუნქციის დროითი მამრავლი და რადგანაც ფიზიკური აზრი აქვს ტალღური ფუნქციის

მოდულის კვადრატს, ეს ცლილება არ აისახება ცდაზე დაკვირვებად სიდიდეებზე.

5.34. $\Psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}$; $\omega = \dfrac{E}{\hbar}$; $k = \dfrac{p}{\hbar}$.

5.35. $c_n = \sqrt{\dfrac{2}{a}}\int_0^a \sin\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)\Psi(x,0)dx$

5.36. ა) $A = \left(\dfrac{2am}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$; ბ) $V(x) = 2ma^2x^2$

5.37. $\langle x\rangle = 0$, $\langle x^2\rangle = \dfrac{\hbar}{4am}$, $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \sqrt{\dfrac{\hbar}{4am}}$, $\langle p\rangle = 0$, $\langle p^2\rangle = am\hbar$

$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2} = \sqrt{am\hbar}$; $\sigma_x\sigma_p = \dfrac{\hbar}{2}$ ანუ კმაყოფილდება ჰეიზენბერგის თანაფარდობა.

5.39. ა) $A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

$$\text{ბ)}\ \Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\psi_1(x)e^{-\frac{iE_1}{\hbar}t} + \psi_2(x)e^{-\frac{iE_2}{\hbar}t}\right] = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-i\omega t}\left[\sin\frac{\pi}{a}x + \sin\frac{2\pi}{a}xe^{-3i\omega t}\right],$$

სადაც $E_n = \dfrac{\hbar^2\pi^2n^2}{2ma^2}$; $n = 1,2$ და $\omega = \dfrac{\pi^2\hbar}{2ma^2}$;

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 2\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{2\pi}{a}x\cos 3\omega t\right]$$

გ) $\langle x\rangle = \dfrac{a}{2}\left[1 - \dfrac{32}{9\pi^2}\cos 3\omega t\right]$; სიხშირე $\gamma = \dfrac{3\omega}{2\pi} = \dfrac{3\pi\hbar}{4ma^2}$; ამპლიტუდა $C = \dfrac{32}{9\pi^2}\dfrac{a}{2} = 0{,}3603\dfrac{a}{2}$;

დ) $\langle p\rangle = m\dfrac{d\langle x\rangle}{dt} = \dfrac{8\hbar}{3a}\sin 3\omega t$

ე) $\langle H\rangle = \int\Psi^*\hat{H}\Psi dx = \dfrac{1}{2}\int(\Psi_1 + \Psi_2)^*\hat{H}(\Psi_1 + \Psi_2)dx = \dfrac{1}{2}(E_1 + E_2)$

ამ ფორმულაში უნდა შევიტანოთ 2.7 ამოცანის ენერგიის ფორმულა და მივიღებთ

$$\langle H\rangle = \frac{1}{2}\frac{(1^2 + 2^2)\pi^2\hbar^2}{2a^2m} = \frac{5}{4}\frac{\pi^2\hbar^2}{a^2m}$$

5.40. $\Psi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}e^{-i\omega t}\left[\sin\dfrac{\pi}{a}x + \sin\dfrac{2\pi}{a}xe^{-3i\omega t}e^{i\phi}\right]$;

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{a}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{a}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + 2\sin\frac{\pi}{a}x\sin\frac{2\pi}{a}x\cos(3\omega t - \phi\right]$$

$\langle x\rangle = \frac{a}{2}\left[1-\frac{32}{9\pi^2}\cos(3\omega t-\phi)\right]$,რაც ნიშნავს, რომ დროის ათვლას ვიწყებთ სხვა მომენტიდან. კერძოდ, როცა $\phi=\frac{\pi}{2}$, $\langle x\rangle$ იწყება $\frac{a}{2}$-დან, ხოლო როცა $\phi=\pi$,$\langle x\rangle$ იწყება $\frac{a}{2}\left[1+\frac{32}{9\pi^2}\right]-$ დან.

5.41. ნორმირების მუდმივა $A=\sqrt{\frac{30}{a^5}}$;

c_n კოეფიციენტების საპოვნელად ვსარგებლობთ 5.35 ამოცანის შედეგით და ვღებულობთ

$$c_n = \frac{4\sqrt{15}}{[n\pi]^3}\left[\cos 0-\cos[n\pi]\right]=\begin{cases}0;\ n=1,3,5...\\ \frac{8\sqrt{15}}{[n\pi]^3};n=0,2,4...\end{cases}$$

ხოლო ტალღური ფუნქცია იქნება

$$\Psi(x,t)=\sqrt{\frac{30}{a}}\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\sum_{n=1,3,5...}^{\infty}\frac{e^{-\frac{i(n+1)^2\pi^2\hbar}{2ma^2}t}}{n^3}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

5.42. ა) $A=\frac{1}{\sqrt{2}}$; ბ) $\Psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t/2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}\left(1+\sqrt{2}\xi e^{-i\omega t}\right)$; $\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$;

$|\Psi(x,t)|^2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\xi^2}\left(1+2\xi^2+2\sqrt{2}\xi\cos\omega t\right)$; გ) $\langle x\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t$; ამლიტუდაა $\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ და სიხშირეა ω. დ) $\langle p\rangle=-\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin\omega t$. ერენფესტის თეორემა ამ მდგომარეობისათვის სრულდება.

5.43.ბ) $\langle H\rangle = E+\frac{1}{2}mv^2$.

5.44. ბ) $|\psi(x,t)|^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x-a\cos\omega t)^2}$ გ) $\langle x\rangle = a\cos\omega t$; $\langle p\rangle=-ma\omega\sin\omega t$. ერენფესტის თეორემა ამ მდგომარეობისათვის სრულდება.

6.1 შეშფოთების სტაციონალური თეორია

6.1. ა) $E_n^{(1)}=V_{nn}=V_0\left\{\frac{1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{\pi^2(n+1)^2}\right\}$; $n=0,1,2,...$

ბ) $E_n^{(1)}=V_{nn}=\frac{V_0}{a}\left\{a-2b+\frac{a}{\pi(n+1)}\sin\frac{2\pi(n+1)b}{a}\right\}$

შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობაა

$$|V_0| << \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}(n+1)$$

6.2.პირდაპირი დათვლით ადვილად ვაჩვენებთ, რომ დიდი n-სთვის

$$E^{(1)} \approx \frac{2}{a}\int_0^a V(x)dx$$

არ არის დამოკიდებული n-ზე.

6.3. სტანდარტული შეშფოთების თეორიით მივიღებთ:

$$E_n^{(1)} = 0; \; E_n^{(2)} = -\frac{e^2 a^2 \varepsilon^2}{2\hbar\omega}$$

ამრიგად მეორე რიგში მიღებული შედეგი ემთხვევა ზუსტ შედეგს, რის გამოც შეშფოთების უფრო მაღალი რიგების განხილვას აზრი არ აქვს.

6.4. $E_n^{(1)} = -\frac{e\varepsilon a}{2}$; $E_n^{(2)} = -\frac{\beta_0 \varepsilon^2}{2}$, სადაც β_0 არის ძირითადი მდგომარეობის პოლარიზება

$$\beta_0 = \frac{1024}{\pi^6}\frac{ma^4e^2}{\hbar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^2}{(2k+1)^5(2k+3)^5}$$

6.5. $E_n \approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + ... = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{\alpha}{2k}-\frac{\alpha^2}{8k^2}\right)+...$

მწკრივის კრებადობის პირობაა $|\alpha/k| \le 1$

6.6. $E_0^{(1)} = \frac{V_0}{4}$; $E_n^{(1)} = \frac{V_0}{2}$; $n = 1,2...$

$$E_n^{(2)} = \frac{ma^2V_0^2}{96\pi^2\hbar^2}\begin{cases} -\frac{3}{2}, \; n=0 \\ -1, \quad n=1 \\ \frac{6}{n(n+2)}, \; n \ge 2 \end{cases}$$

შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობაა

$$|V_0| << \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}(n+1)$$

6.7. $E_0^{(3)} = \frac{m^2a^4V_0^3}{1024\pi^4\hbar^4}$

6.8. $E_n^{(1)} = E_n^{(2)} = 0$ თუ n კენტია;

$E_n^{(1)} = \frac{2a}{\alpha}$ თუ n ლუწია.

$E_n^{(2)} = -\frac{2m\alpha^2}{\pi^2\hbar^2(n+1)^2}$ თუ n ლუწია.

შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობაა

$$\left|\frac{\alpha}{a}\right| << \frac{\hbar^2}{ma^2\pi^2}(n+1)$$

6.9. შენარჩუნდება.

6.10. პოლარიზება ტოლია

$$\alpha_0 = \frac{2Id^2}{\hbar^2}$$

6.11. პოლარიზება ტოლია

$$\alpha_0 = \frac{2Id^2}{3\hbar^2}$$

6.12. დონე ორჯერადადაა გადაგვარებული, ხოლო პირველი აღგზნებული დონის გახლეჩა იქნება $\mp\frac{\alpha a^2}{2}$.დონეების გადაგვარება იხსნება.

6.13. დონე სამჯერადადაა გადაგვარებული, ხოლო მეორე აღგზნებული დონის გახლეჩა იქნება $E_{2,1}^{(1)} = -\alpha a^2$; $E_{2,2}^{(1)} = 0; E_{2,3}^{(1)} = \alpha a^2$. დონეების გადაგვარება იხსნება.

6.14. $E_0^{(2)} = -\frac{1}{2}\beta_0\varepsilon^2$; სადაც $\beta_0 = \frac{5me^2}{4\hbar^2\eta^4}$ პოლარიზებაა და $\eta = \frac{m\alpha}{\hbar^2}$;

6.15. $E_n^{(0)} = -d\varepsilon + \hbar\sqrt{\frac{d\varepsilon}{I}}\left(n + \frac{1}{2}\right),\ n = 0,1,2,...$

$$\Psi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2^n\varphi_0 n!\sqrt{\pi}}}\exp\left\{-\frac{\varphi^2}{2\varphi_0^2}\right\}H_n\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right);\ \varphi_0 = \left(\frac{\hbar^2}{Id\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}}$$

, სადაც $H_n(\varphi)$ ერმიტის პოლინომებია.

6.16. $E_N^{(0)} = -d\varepsilon + \hbar\omega(N+1),\ \omega = \left(\frac{d\varepsilon}{I}\right)^{1/2},\ N = 0,1,2...$

$$\Psi_{n_1 n_2}^{(0)} = C_{n_1}C_{n_2}\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right\}H_{n_1}\left(\frac{x}{\theta_0}\right)H_{n_2}\left(\frac{y}{\theta_0}\right);\ n_1 + n_2 = N; \qquad \theta_0 = \left(\frac{\hbar^2}{Id\varepsilon}\right)^{\frac{1}{4}},$$

სადაც $H_n(\theta)$ ერმიტის პოლინომებია.

6.17. $E_0^{(1)} = \frac{\hbar^2\pi^2\varepsilon}{3ma^2}$

6.18. $E_{n_r l}^{(1)} = U_0\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{24\xi}\left[3n^2 - l(l+1)\right]\right\}, n = n_r + l + 1;\ \xi = \frac{ma^2U_0}{\hbar^2}$.

6.19. $E_{n_r l}^{(1)} = \frac{\alpha}{a}\left\{1 - \frac{1}{4\xi}\left[3n_r^2 + 6n_r(l+1) + (l+1)(2l+3)\right]\right\}, n = n_r + l + 1$

6.20. $R_{n_r l}^{(0)}(r) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_r}an_r!\sqrt{\pi}}}\exp\left\{-\frac{(r-r_0)^2}{2a^2}\right\}H_{n_r}\left(\frac{r-r_0}{a}\right)$;

$$E_{n_r l}^{(0)} = -\frac{\alpha(2-p)}{2}r_0^{-p} + \hbar\sqrt{\frac{\alpha(2p-p^2)}{m}r_0^{-p-2}}\left(n_r + \frac{1}{2}\right);$$

$$a = \left(\frac{\hbar^2 r_0^{p+2}}{m\alpha(2p-p^2)}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

6.21. მოცემული ამოცანის ამონახსნი მიიღება წინა 6.20 ამოცანაში თუ გავაკეთებთ შეცვლებს $\alpha \to -\alpha;\ \nu \to -\nu$

6.22. $\psi_n^{(2)} = \sum_m \sum_k \frac{V_{mk}V_{kn}}{\hbar^2 \omega_{nk}\omega_{nm}} \psi_m^{(0)} - \sum_m \frac{V_{nn}V_{mn}}{\hbar^2 \omega_{mn}^2} \psi_m^{(0)} - \frac{\psi_n^{(0)}}{2} \sum_m \frac{|V_{mn}|^2}{\hbar^2 \omega_{nm}^2}$;

$\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}\left(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}\right)$

6.23. $E_n^{(3)} = \sum_k \sum_m \frac{V_{nm}V_{mk}V_{kn}}{\hbar^2 \omega_{mn}\omega_{kn}} - V_{nn} \sum_m \frac{|V_{nm}|^2}{\hbar^2 \omega_{mn}^2}$; $\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}\left(E_n^{(0)} - E_m^{(0)}\right)$

6.24. $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4}\frac{\alpha^2}{\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3\left(n^2 + n + \frac{11}{30}\right) + \frac{3}{2}\beta\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2\left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right)$

6.25. $E^{(1)} = \frac{1}{2}\left[V_{11} + V_{22} \pm \hbar\omega^{(1)}\right]$, სადაც $\hbar\omega^{(1)} = \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4|V_{12}|^2}$

$\psi^{(0)} = c_1^{(0)}\psi_1^{(0)} + c_2^{(0)}\psi_2^{(0)}$, სადაც

$c_1^{(0)} = \left\{\frac{V_{12}}{2|V_{12}|}\left[1 \pm \frac{V_{11} - V_{22}}{\hbar\omega^{(1)}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$; $c_2^{(0)} = \pm\left\{\frac{V_{21}}{2|V_{12}|}\left[1 \mp \frac{V_{11} - V_{22}}{\hbar\omega^{(1)}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$;

6.26. $E_n^{(2)} = \sum_m \frac{V_{nm}V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$

6.27. $E_{nl}^{(1)} = -\frac{eB}{2\mu}\hbar m$, სადაც m მაგნიტური კვანტური რიცხვია.

6.29. ყველა ენერგიის დონე წაინაცვლებს $V_0/2$ სიდიდით,ხოლო ტალღური ფუნქციები არ შეიცვლება.

6.30. $E^{(1)} = 0$

6.31. $E_n^{(1)} = 0$; $E_n^{(2)} = \frac{ma^2\lambda^2}{\hbar^2}\frac{1}{4n^2 - 1}$.

6.32. $E_n^{(1)} = -\frac{qa}{2}$; $\psi_m^{(1)} = \frac{-4qma^3}{\pi^4\hbar^2}\psi^{(0)} \sum_{m \neq n} \frac{mn(\cos\pi m \cos\pi n - 1)}{\left(m^2 - n^2\right)^2}\psi_m^{(0)}$

6.34. $E_n^{(1)} = -\frac{mZe^4}{\hbar^2 n^2}$

6.35. $E_2^{(0)} = -\frac{e^2}{8a}$ დონე იხლიჩება გადაუგვარებელ $E_{2,l=0} \approx E_2^{(0)}\left(1 - \frac{1}{140}\left(\frac{b}{a}\right)^4\right)$ და სამჯერადად გადაგვარებულ $E_{2,l=1} \approx E_2^{(0)}\left(1 - \frac{1}{140}\left(\frac{b}{a}\right)^4\right)$ დონედ.

6.36. $\Delta E_{n_1,n_2}^{(1)} = \frac{L^2 C}{4}$, სადაც L ორმოს სიგანეა.

6.37. $E_0^{(1)} = -\frac{\hbar\omega}{2}\left(1 + \frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{m\omega a^2}{\hbar}\right)$

$$E_0^{(2)} = -\frac{\hbar\omega}{8}\left(1 + \frac{m\omega a^2}{\hbar} + \frac{m^2\omega^2 a^4}{\hbar^2}\right)\exp\left(-\frac{2m\omega a^2}{\hbar}\right)$$

6.38. $E_n^{(1)} = \frac{e\varepsilon a}{2}$

6.2 ვარიაციული მეთოდი

6.39. ა) $E_0 = \left(\frac{243}{32}\right)^{1/3}\left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3} \approx 1{,}966\left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3}$

ბ) $E_0 = \left(\frac{81}{4\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3} \approx 1{,}861\left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3}$

6.40. ა) $E = -\frac{4m\alpha^2}{\pi^2\hbar^2} \approx 0{,}81E_0$

ბ) $E = -\frac{256m\alpha^2}{70\pi^2\hbar^2} \approx 0{,}74E_0$

6.41. $E = \sqrt{3}\hbar\omega \approx 1{,}73\hbar\omega;\ \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ზუსტი მნიშვნელობაა $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

6.42. ა) $E = \frac{5\hbar^2}{ma^2} \approx 1{,}013E_0$; ბ) $E = \frac{2\hbar^2\pi^2}{3ma^2} \approx 1{,}333E_0$; გ) $E = \frac{6\hbar^2}{ma^2} \approx 1{,}21E_0$

6.43. $E = \frac{21\hbar^2}{ma^2} \approx 1{,}064E_1$

6.44. $E = \frac{28\hbar^2}{ma^2} \approx 1{,}064E_1$; ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$.

6.45. ბმული დონის არსებობის საკმარისი პირობაა

$$\max\left\{\beta\int_0^\infty |U(r)| r^2 e^{-2\beta r}\,dr\right\} \ge \frac{\hbar^2}{8m}$$

ამ ფორმულაში მინიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება პარამეტრის ოპტიმალურ მნიშვნელობას.

6.46. ა) $E = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71\hbar\omega;\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ბ) $E = \frac{\sqrt{7}\hbar\omega}{5} \approx 0{,}53\hbar\omega;\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

6.47. ა) $E = \left(\frac{243}{16}\right)^{1/3}\left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3} \approx 2{,}48\left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3}$;

ბ) $E = \left(\frac{81}{2\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3} \approx 2{,}345\left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3}$;

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = 2{,}338\left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3}$

6.48. ა) $\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \geq \exp\frac{y}{4y} \geq e/4 \approx 0{,}68$; $\qquad y = 2\eta a$

$\xi \geq \frac{3\sqrt{\pi}}{16y}e^{y^2} \geq \frac{3\sqrt{2\pi e}}{16} \approx 0{,}77$; $\qquad y^2 = \eta a^2$

ზუსტი მნიშვნელობაა

$\xi_0 = 0{,}5$

6.49. ა) $E = \frac{3\hbar^2}{\mu a^2}$;

ბ) $E = 2{,}92\frac{\hbar^2}{\mu a^2}$;

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = 2{,}88\frac{\hbar^2}{\mu a^2}$

6.50. $E_{01} = 7{,}5\frac{\hbar^2}{\mu a^2}$;

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = 7{,}33\frac{\hbar^2}{\mu a^2}$

6.51. $E_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\hbar\omega \approx 1{,}22\hbar\omega$

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = \hbar\omega$

6.52. ა) $E = -\frac{4}{3\pi}\frac{m\alpha^2}{\hbar^2} \approx -0{,}42\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$;

ბ) $E = -\frac{5}{16}\frac{m\alpha^2}{\hbar^2} \approx -0{,}31\frac{m\alpha^2}{\hbar^2}$;

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$.

6.53. $E_{2s} = -\frac{e^2}{8a}$; $\quad \psi_{2s} = \left(8\pi a^3\right)^{-1/2}\left(1-\frac{r}{2a}\right)e^{-\frac{r}{2a}}$.

6.54. ა) $E = \sqrt{3}\hbar\omega \approx 1{,}73\hbar\omega$; $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ბ) $E = 2\sqrt{\frac{5}{7}}\hbar\omega \approx 1{,}69\hbar\omega$; $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

6.55. $E = \frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}\hbar\omega \approx 1{,}575\hbar\omega$; $\quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

ზუსტი მნიშვნელობაა $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

6.57. $E=\frac{3}{4}3^{1/3}\frac{\hbar^2}{2m}k^{1/3}=1{,}082\frac{\hbar^2}{2m}k^{1/3}$

6.61. $E=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left\{1-2(ma)+\frac{3}{2}(ma)^2\right\}$

6.3 შეშფოთების არასტაციონალური თეორია

6.62. ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ($t\to-\infty$) ტოლია

ა) $W^{(1)}(0\to n)=\begin{cases}0,; & n=2k;\; k=1,2,..\\ \frac{64a^2F_0^2(n+1)^2}{\pi^4n^4(n+2)^4\hbar^2}I; & n=2k+1\end{cases}$

სადაც

$$I=\sqrt{\pi}\tau\exp\left(-\frac{\omega_{n0}^2\tau^2}{4}\right);\; \omega_{n0}=\hbar\pi^2n(n+2)/2ma^2$$

ბ) $W^{(1)}(0\to n)=\begin{cases}0,; & n=2k;\; k=1,2,..\\ \frac{64a^2F_0^2(n+1)^2}{\pi^4n^4(n+2)^4\hbar^2}I; & n=2k+1\end{cases}$

სადაც

$$I=2\tau\left(1+\omega_{no}^2\tau^2\right)^{-1};\; \omega_{n0}=\hbar\pi^2n(n+2)/2ma^2$$

მიღებული შედეგები სამართლიანია როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$ma^3F_0<<\hbar^2\pi^2$$

6.63. $W^{(1)}(n\to k)=\frac{e^2a^2|I|^2}{2\hbar^2}\begin{cases}n+1; & k=n+1;\\ n; & k=n-1\end{cases}$ $\qquad a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

სადაც I ა) და ბ) შემთხვევებში ტოლია

ა) $I=\sqrt{\pi}\tau\varepsilon_0\exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right)$; ბ) $I=\frac{2\tau\varepsilon_0}{1+\omega^2\tau^2}$

მიღებული შედეგები სამართლიანია როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$ea\varepsilon_0\sqrt{n+1}<<\hbar\omega$$

6.64. $W^{(1)}(n\to k)=\frac{e^2a^2|I|^2}{2\hbar^2}\begin{cases}n+1; & k=n+1;\\ n; & k=n-1\end{cases}$ $\qquad a=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

სადაც I ა) და ბ) შემთხვევებში ტოლია

ა) $I=\pi\tau\varepsilon_0\exp(-|\omega\tau|)$;

ბ) $I=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\tau\varepsilon_0\left\{\exp\left[-\frac{1}{4}(\omega-\omega_0)^2\tau^2\right]+\exp\left[-\frac{1}{4}(\omega+\omega_0)^2\tau^2\right]\right\}$

მიღებული შედეგები სამართლიანია როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$ea\varepsilon_0\sqrt{n+1} << \hbar\omega$$

6.65. ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ n მდგომარეობიდან $n+1$ და $n-1$ მდგომარეობებში გადასვლის ალბათობები

$$W^{(1)}(n \to n+1) = \frac{q^2\varepsilon_0^2}{2m\hbar\omega^3}(n+1)e^{-2\omega\tau}; \qquad W^{(1)}(n \to n-1) = \frac{q^2\varepsilon_0^2}{2m\hbar\omega^3}ne^{-2\omega\tau}$$

მიღებული შედეგები სამართლიანია როცა სრულდება შემდეგი პირობა

$$W^{(1)}(n \to n+1) + W^{(1)}(n \to n-1) << 1$$

6.66. ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ m მდგომარეობიდან $m+1$ და $m-1$ მდგომარეობებში გადასვლის ალბათობები

$$W^{(1)}(m \to m') = \frac{d^2}{4\hbar^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon(t)\exp(i\omega_{m'm}t)dt\right|^2 \qquad (1)$$

(1) ფორმულაში

$$\omega_{m'm} = \frac{(2m+1)\hbar}{2I}, \text{როცა } m' = m+1 \text{ და } \omega_{m'm} = \frac{(2m-1)\hbar}{2I}, \text{ როცა } m' = m-1$$

6.67. $$a_{kn}^{(2)} = -\frac{1}{\hbar^2}\sum_m\int_{-\infty}^{t}V_{km}(t')\exp\left(i\omega_{km}^{(0)}t'\right)\int_{-\infty}^{t'}V_{mn}(t'')\exp\left(i\omega_{mn}^{(0)}t''\right)dt''dt' \qquad (1)$$

სისტემის მე -n საწყისი მდგომარეობიდან საბოლოო k-ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა (შეშფოთების გამორთვის შემდეგ) ტოლია $(k \neq n)$

$$W(n \to k) = \left|a_{kn}(t = +\infty)\right|^2 = \left|a_{kn}^{(1)}(t = \infty) + a_{kn}^{(2)}(t = \infty) + \ldots\right|^2 \qquad (2)$$

და თუ $a_{kn}^{(1)}(t = +\infty) = 0$, მაშინ

$$W^{(2)}(n \to k) = \left|a_{kn}^{(2)}(t = +\infty)\right|^2 \qquad (3)$$

სიდიდე წარმოადგენს შესაბამის მდგომარეობაში სისტემის გადასვლის ალბათობას შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში.

6.69. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში შესაძლოა როტატორის გადასვლა იმ მდგომარეობებში, რომელთათვისაც $m = \pm 1$ ანუ $E_1 = \frac{\hbar^2}{2I}$ მდგომარეობაში. $t \to \infty -$ში იმის ალბათობა, რომ როტატორს E_1 ენერგია, ექნება შემდეგი თანაფარდობით მოიცემა

$$W(E_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{qQa}{\hbar bv}\right)^2\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\frac{i\hbar b\tau}{2Iv}}{\left(1+\tau^2\right)^{3/2}}d\tau\right|^2 \qquad (1)$$

(1) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი კი ტოლია დამატებაში განმარტებული **(C.3.19)** მაკდონალდის ფუნქციის

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\frac{i\hbar b\tau}{2Iv}}{\left(1+\tau^2\right)^{3/2}}d\tau = 2\beta K_1(\beta); \quad \beta = \frac{\hbar b}{2Iv} \qquad (2)$$

6.70. $W(E_1)=\frac{2(qQ)^2}{b^2\hbar\omega m v^2}\left[\frac{\omega b}{v}K_1\left(\frac{\omega b}{v}\right)\right]^2$

6.71. $W_{01}^{(1)}=\frac{(q\varepsilon)^2}{2m\hbar\omega_0}\left[\frac{\sin\frac{\omega_0\tau}{2}}{\frac{\omega_0}{2}}\right]^2$

6.72. $W_{0k}=\frac{1}{\hbar^2}e^{-\frac{(E_0-E_k)^2\tau^2}{2\hbar^2}}$

6.73. $W=\frac{m^2a^4V_0^2}{4\pi^6\hbar^4}\sin^2\frac{2\pi^2\hbar^2}{ma^2}t$

7.1 ენერგეტიკული სპექტრის დაკვანტვა

7.1. $E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$.შედეგი ემთხვევა ზუსტ შედეგს.

7.2. $E_n=-\frac{\hbar^2}{2ma^2}\left[\sqrt{\frac{2ma^2U_0}{\hbar^2}}-\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2$

7.3.
$$E_n=\left(\frac{\pi\hbar(n+1/2)}{2\sqrt{2m}C_\nu a}\right)^{\frac{2\nu}{\nu+2}}U_0^{\frac{2}{\nu+2}} \quad (1)$$

სადაც
$$C_\nu=\int_0^1\sqrt{1-t^\nu}\,dt \quad (2)$$

(1)-დან მივიღებთ იმის გათვალისწინებით, რომ $n>>1$
$$\Delta E_n=E_{n+1}-E_n\approx\frac{\partial E_n}{\partial n}\approx\frac{E_n 2\nu}{n(\nu+2)} \quad (3)$$

დისკრეტული სპექტრის სიმკვრივეა
$$g(E)=\frac{1}{\Delta E_n}=\frac{n(\nu+2)}{2\nu E_n}\propto E^{\frac{2-\nu}{2\nu}} \quad (4)$$

7.4. კვაზიკლასიკურის გამოყენების პირობა ამ ამოცანაში ასე გამოიყურება
$$\frac{\hbar\nu}{2\sqrt{2m\alpha}}\left|x-x_0\right|^{\frac{\nu-2}{2}}<<1$$

$\nu=2$-სთვის კვაზიკლასიკურის გამოყენების პირობაა $\sqrt{m\alpha}>>\hbar$

7.5. კვაზიკლასიკურის გამოყენების პირობაა
$$\frac{\hbar\nu}{2\sqrt{2m\alpha}}r^{\frac{\nu-2}{2}}<<1$$

7.6. $E_n\approx-\frac{4\alpha}{a^2}\exp\left\{-\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m\alpha}}(n+3/4)-2\right\}$

7.7. კვაზიკლასიკურის გამოყენების პირობაა

$$\frac{\hbar}{\sqrt{mU_0a^2}}|y|^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x_0}{a}\right)^{-1-\nu/2} << 1 \qquad (1)$$

სადაც

$$y = \frac{x - x_0}{x_0} \qquad (2)$$

რადგანაც მაღალი დონეებისათვის $E_n \to \infty$, შესაბამისად $x_0 \to \infty$, (1) გამოსახულებიდან გვექნება,რომ $\nu > 0$-თვის შეიძლება გამოვიყენოთ კვაზიკლასიკური მიდგომის სტანდარტული ფორმულები.

7.8. $\delta E_n \approx \frac{1}{\tau}\int_a^b \frac{\delta U(x)}{v(x)}dx;$

სადაც $v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E_n^{(0)} - U_0(x)\right]}$ და $\tau = \int_a^b \frac{dx}{v(x)}$, ხოლო $E_n^{(0)}$ საწყისი ენერგიაა.

7.9. $N = \frac{\sqrt{2}}{3\pi^2}\frac{m^{3/2}}{\hbar^3}\int(-U)^{3/2}dV$. ამ ფორმულაში ინტეგრება ხდება სივრცის იმ ნაწილში, სადაც $U < 0$.

7.10. $N = \frac{m}{4\hbar^2}\int(-U)rdr$

7.11. $E_{n+1} - E_n = V_0 \ln\frac{n+3/4}{n-1/4}$

7.2. კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციები, ალბათობები და საშუალოები. პოტენციალურ ბარიერებში გასვლა

7.12. $\langle F(x)\rangle = \frac{\sqrt{2m}}{T(E_n)}\int_a^b \frac{F(x)dx}{\sqrt{E_n - U(x)}};$

$$\langle x^2\rangle = \alpha^2\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad \langle x^4\rangle = \frac{3}{2}\alpha^4\left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right); \quad \alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$$

7.13. $\langle F(p)\rangle = \frac{1}{T(E_n)}\oint\frac{F(p(x))dx}{v(x)};$

$$\langle p^2\rangle = m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad \langle p^4\rangle = \frac{3}{2}(m\hbar\omega)^2\left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right);$$

7.14. მიზიდვისათვის $\psi \approx r^{\frac{s}{4}-1}$, ხოლო განზიდვისათვის

$$\psi \approx \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\left|\int_{r_0}^r pdr\right|\right) = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m\alpha}}{(s-2)\hbar}r^{-\left(\frac{s}{2}-1\right)}\right]$$

7.15. $\int_a^b p(x)dx = \pi\hbar(n + 3/4); \quad n = 0,1,2,...$

7.16. $D \approx \exp\left[-\frac{\pi a}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{U_0}}(U_0 - E)\right]; \quad x_0 = a\sqrt{1-\frac{E}{U_0}}$

7.17. $D \approx \exp\left[-\frac{4a\sqrt{2m}}{3U_0\hbar}(U_0 - E)^{3/2}\right];$

7.18. $D \approx \exp\left\{-\frac{4a}{\hbar}\sqrt{2mE}\left[\sqrt{\frac{U_0}{E}-1} - arctg\sqrt{\frac{U_0}{E}-1}\right]\right\}$

7.19. $D \approx \exp\left\{-\frac{2\pi a}{\hbar}\sqrt{2m}\left[\sqrt{U_0} - \sqrt{E}\right]\right\}$

7.20. $D = 4\frac{\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0}\exp\left(-\frac{2}{p}\int_a^b |p|dx\right)$; $U_0 = \widetilde{U}(0)$

7.21. $D = 4\frac{\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0}\exp\left[-\frac{4a\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U_0 - E)^{\frac{3}{2}}\right]$; კვაზიკლასიკურობის გამოყენების პირობაა $\frac{4a\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U_0 - E)^{\frac{3}{2}} >> 1$

7.22. $W \approx \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}}\left[\arccos\sqrt{\frac{Er_0}{\alpha}} - \sqrt{\frac{Er_0}{\alpha}\left(1-\frac{Er_0}{\alpha}\right)}\right]\right\}$

7.23. $D = D_0 \exp\left\{-\frac{8x_0\sqrt{2mE}}{\hbar}\left(\sqrt{\frac{U_0}{E}-1} - arctg\sqrt{\frac{U_0}{E}-1}\right)\right\}$

8. სპინი

8.1. $s_x = \pm\frac{1}{2}$; ამ მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ფუნქციებია

$$\Psi_{s_x=+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}; \; \Psi_{s_x=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Psi_{s_y=+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}; \; \Psi_{s_y=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

$s_z = \pm\frac{1}{2}$; ამ მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ფუნქციებია

$$\Psi_{s_z=+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}; \; \Psi_{s_z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

8.5. $\hat{s}_n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$, სადაც θ და φ პოლარული და აზიმუტალური კუთხეებია, რომლებიც განსაზღვრავენ $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორის მიმართულებას.

8.6. $f = a + \vec{b}\hat{\vec{\sigma}}$ ოპერატორს გააჩნია ორი საკუთარი მნიშვნელობა $f_1 = a + b$ და $f_2 = a - b$

8.7. რადგანაც სპინის პროექცია ნებისმიერ ღერძზე მხოლოდ ორ $\pm 1/2$ მნიშვნელობას ღებულობს, სპინის პროექციის კვადრატს (ნებისმიერ ღერძზე) ნებისმიერ მდგომარეობაში ყოველთვის აქვს $1/4$ მნიშვნელობა.

8.8. $\hat{L}$ ოპერატორის ერმიტულობა მისი მატრიცულ შემდეგ შეზღუდვას ადებს

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^{\bullet} & c \end{pmatrix} \tag{1}$$

სადაც a და c ნამდვილი რიცხვებია. უნიტარული გარდაქმნებით (1) მატრიცა დიაგონალურ სახეზე შეიძლება იქნას მიყვანილი

$$\hat{L}' = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

სადაც l_1 და l_2 $\hat{L}$ ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობებია. (1) მატრიცის შპურის და დეტერმინანტის ინვარიანტობიდან კი უნიტარული გარდაქმნების მიმართ, მივიღებთ

$$l_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + |b|^2} \tag{3}$$

8.10 $|\hat{\sigma}_z| = \sqrt{\hat{\sigma}_z^2} = 1, \left|\hat{\vec{\sigma}}\right| = \sqrt{\hat{\vec{\sigma}}^2} = \sqrt{3}\hat{1}$

8.11. $\vec{\sigma}[\vec{\sigma}\vec{\sigma}] = 6i\hat{1}$

8.12. $\left(\vec{a}\hat{\vec{\sigma}}\right)^n = \begin{cases} a^n, & n = 2k; \; k = 0,1,2 \\ a^{n-1}\left(\hat{\vec{\sigma}}\vec{a}\right), & n = 2k+1 \end{cases}$

8.13. $\hat{s}_+ = \hat{s}_x + i\hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\hat{s}_- = \hat{s}_x - i\hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\hat{s}_+^2 = \hat{s}_-^2 = 0$.

8.14. $\hat{P}_{s_z = \pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\sigma}_z)$

8.15. $\hat{P}_{s_n = \pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 \pm \vec{\sigma}\vec{n})$

8.16.
$$\Psi' = \begin{pmatrix} \psi_1' \\ \psi_2' \end{pmatrix} = \exp\left(i\varphi_0 \frac{\hat{\vec{\sigma}}}{2}\right)\Psi = \left(\cos\frac{\varphi_0}{2} + i\sin\frac{\varphi_0}{2}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{n}}\right) \tag{1}$$

(1)-დან მიიღება $\Phi^{\bullet} = \left|\varphi_1^{\bullet}, \varphi_2^{\bullet}\right|$ სპინორული ფუნქციის გარდაქმნის კანონი

$$\Phi^{\bullet''} = \Phi^{\bullet}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2} - i\sin\frac{\varphi_0}{2}\hat{\vec{\sigma}}\hat{\vec{n}}\right) \tag{2}$$

8.19. $\left(\hat{\vec{\sigma}}_1\hat{\vec{\sigma}}_2\right)^2 = 3 - 2\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2$

8.20. $W_+ = \cos^2\frac{\theta}{2}; \quad W_- = \sin^2\frac{\theta}{2}$.

8.21. $A = \frac{1}{2}\left[F(a+b) + F(a-b)\right]$; $\vec{B} = \frac{\vec{b}}{2b}\left[F(a+b) - F(a-b)\right]$.

8.22. $\exp(i\vec{a}\vec{\sigma}) = \cos a + i\sin a\left(\hat{\vec{\sigma}}\frac{\vec{a}}{a}\right)$

8.23. ა) $A = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$; ბ) $A = \frac{1}{5}$.

8.24. $(S_1S_2) = \frac{\hbar^2}{4}$ ტრიპლეტურ მდგომარეობებში.

$(S_1S_2) = -\frac{3}{4}\hbar^2$ სინგლეტურ მდგომარეობებში.

8.25. $\langle \hat{A} \rangle = 0$

9.1. ტალღური ფუნქციების სიმეტრია.

9.1. χ_{s_z} იყოს ცალკეული ნაწილაკების ნორმირებული სპინური ფუნქციები, რომელთაც s_z-ის გარკვეული მნიშვნელობა გააჩნიათ $s_z = -s, -s+1, \ldots, s$. სისტემის სპინური (არასიმეტრიზირებული სპინების მიხედვით) ფუნქციებია $X = \chi_{s_z}^{(1)}\chi_{s_z}^{(2)}$. ამ ფუნქციების შემდეგი კომბინაციები

ა) $X_{s_z s_z}^{(+)} = \chi_{s_z}^{(1)}\chi_{s_z}^{(2)}$

ბ) $X_{s_z s_z'}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\chi_{s_z}^{(1)}\chi_{s_z'}^{(2)} + \chi_{s_z}^{(2)}\chi_{s_z'}^{(1)}\right\}$; $s_z \neq s_z'$

გ) $X_{s_z s_z'}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\chi_{s_z}^{(1)}\chi_{s_z'}^{(2)} - \chi_{s_z}^{(2)}\chi_{s_z'}^{(1)}\right\}$; $s_z \neq s_z'$

ერთიანზეა ნორმირებული და გააჩნიათ გარკვეული სიმეტრია სპინური ცვლადების გადასმის მიმართ. ($X_{s_z s_z}^{(+)}$ სიმეტრიული, ხოლო $X_{s_z s_z'}^{(-)}$ ანტისიმეტრიული ფუნქციაა). ა) შემთხვევაში $2s+1$ განსხვავებული სპინური მდგომარეობა იქნება, ხოლო ბ) და გ) მდგომარეობებში $C_{2s+1}^2 = (2s+1)2s/2! = s(2s+1)$. შესაბამისად სიმეტრიული მდგომარეობების საერთო რიცხვი იქნება $(s+1)(2s+1)$, ხოლო ანტისიმეტრიულის $s(2s+1)$, ხოლო მდგომარეობების საერთო რიცხვი, როგორც უნდა ყოფილიყო, იქნება $(2s+1)^2$.

9.2. წინა 9.1 ამოცანის შედეგების გათვალისწინებით მივიღებთ ბოზონებისათვის

$$\Psi = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)X_{s_z s_z'}^{(+)}$$

ხოლო ფერმიონებისათვის

$$\Psi = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)X_{s_z s_z'}^{(-)}$$

და საერთო რიცხვი ბოზონებისათვის არის $(s+1)(2s+1)$, სადაც s მთელი რიცხვია, ფერმიონებისათვის კი $s(2s+1)$, სადაც s ნახევარმთელი რიცხვია.

9.3. ბოზონებისა და ფერმიონებისათვის ეს რიცხვია $(2s+1)^2$

9.5. ა) თუ $f_1 = f_2 = f_3 = f$,მაშინ $\Psi = \psi_f(\xi_1)\psi_f(\xi_2)\psi_f(\xi_3)$

ბ) თუ $f_1 \neq f_2 = f_3$, მაშინ

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\psi_{f_1}(\xi_1)\psi_{f_2}(\xi_2)\psi_{f_2}(\xi_3) + \psi_{f_2}(\xi_1)\psi_{f_1}(\xi_2)\psi_{f_3}(\xi_3) + \psi_{f_2}(\xi_1)\psi_{f_2}(\xi_2)\psi_{f_1}(\xi_3)\right\}$$

გ) $f_1 \neq f_2 \neq f_3 \neq f_1$, მაშინ

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}}\left\{\begin{aligned}&\psi_{f_1}(\xi_1)\psi_{f_2}(\xi_2)\psi_{f_3}(\xi_3) + \psi_{f_1}(\xi_1)\psi_{f_3}(\xi_2)\psi_{f_2}(\xi_3) + \psi_{f_2}(\xi_1)\psi_{f_1}(\xi_2)\psi_{f_3}(\xi_3) + \\ &+ \psi_{f_2}(\xi_1)\psi_{f_3}(\xi_2)\psi_{f_1}(\xi_3) + \psi_{f_3}(\xi_1)\psi_{f_2}(\xi_2)\psi_{f_1}(\xi_3) + \psi_{f_3}(\xi_1)\psi_{f_1}(\xi_2)\psi_{f_2}(\xi_3)\end{aligned}\right\}$$

9.6. $s_{z,1} = s_{z,2} = s_{z,3} = 1-$თვის გვექნება

$$\Psi_{1,1,1} = \varphi(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2)\varphi(\vec{r}_3)\chi_1^{(1)}\chi_1^{(2)}\chi_1^{(3)} = \varphi(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2)\varphi(\vec{r}_3)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_3$$

$s_{z,1} = s_{z,2} = 1$; $s_{z,3} = 0-$თვის გვექნება

$$\Psi_{1,1,0} = \varphi(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2)\varphi(\vec{r}_3)\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\chi_1^{(1)}\chi_1^{(2)}\chi_0^{(3)} + \chi_1^{(1)}\chi_0^{(2)}\chi_1^{(3)} + \chi_0^{(1)}\chi_1^{(2)}\chi_1^{(3)}\right\} = \varphi(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2)\varphi(\vec{r}_3)\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_3\right\}$$

ამოვწეროთ $(s_{z,1}; s_{z,2}; s_{z,3})$ სიდიდეების ყველა სხვა მნიშვნელობები, რომლებსაც მივყავართ სისტემის დამოუკიდებელ მდგომარეობებამდე: (1,1,-1), (1,0,0), (1,0,-1), (1,-1,-1), (0,0,0), (0,0,-1), (0,-1,-1), (-1,-1,-1). სულ გვაქვს სისტემის 10 დამოუკიდებელი მდგომარეობა, რომელთაგან 7 შეესაბამება $S = 3$ სისტემის სრულ სპინს, ხოლო 3 $S = 1$ სრულ სპინს.

9.7. ამოცანა წინა 9.6 ამოცანის ანალოგიურია. სულ გვაქვს სისტემის 10 დამოუკიდებელი მდგომარეობა.

9.9. $dW = 2\left|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right|^2 dV_1 dV_2$

9.10. ა) $W = \iint \left|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right|^2 dV_1 dV_2$

ბ) $W = 2\iint \left|\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\right|^2 dV_1 dV_2$

9.11. $dW = \frac{1}{2}\left\{|\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2\right\}dV$

ა) $W = 1/2$

ბ) $W = \frac{1}{4}\left\{1 + 4|S|^2\right\}$, სადაც $S = \int\limits_{z\geq 0}\psi_1^*(\vec{r})\psi_2(\vec{r})dV$

9.12. $dW = \frac{1}{2}\left\{|\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2\right\}dV$

ა) $W = 1/2$

ბ) $W=\frac{1}{4}\left\{1-4|S|^2\right\}$, სადაც $S=\int\limits_{z\geq 0}\psi_1^*(\vec r)\psi_2(\vec r)dV$

9.13. $dW=\left|\Psi\left(\vec R+\frac{\vec r}{2},\vec R-\frac{\vec r}{2}\right)\right|^2 d^3Rd^3r$. ნაწილაკებს შორის მანძილის მიხედვით განაწილების ფუნქცია იქნება

$$dW=f(\vec r)d^3r;\ f(\vec r)=\int\left|\Psi\left(\vec R+\frac{\vec r}{2},\vec R-\frac{\vec r}{2}\right)\right|^2 d^3r \qquad (1)$$

(1)-ის გათვალისწინებით $\int|\Psi(\vec r,\vec r)|d\vec r$ არის ნაწილაკების ერთ წერტილში მოხვედრის ალბათობა.

9.15. $L=0,2,4...$ თვის S-მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს: $2s,2s-2,...,0.$, ხოლო $L=1,3,5...$ თვის S-მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს: $2s-1,2s-3,...,1.$

9.16. $L=0,2,4...$ თვის S-მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს: $2s-1,2s-3,...,0.$, ხოლო $L=1,3,5...$ თვის S-მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს: $2s,2s-2,...,1.$

9.17. ნაწილაკების იგივურობის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$E_N=\hbar\omega(N+3/2);\ N=n_1+n_2+n_3;\ N=0,2,4,...$$

9.18. $-\frac{1}{3}\left(\vec r_1^{\,2}+\vec r_2^{\,2}+\vec r_1\vec r_2\right)$

9.20. $dW=|\psi_1(\vec r)|^2dV|\psi_2(\vec r)|^2dV+\left|\psi_1^*(\vec r)\psi_2(\vec r)\right|^2(dV)^2$

განსხვავებული ნაწილაკების შემთხვევაში

$$dW=|\psi_1(\vec r)|^2dV|\psi_2(\vec r)|^2dV$$

ანუ არ გვაქვს ინტერფერნციული წევრი.

9.21. ნაწილაკების საშუალო სიმკვრივე შესაბამისი ოპერატორის

$$\hat n(\vec r)=\sum_a\delta(\vec r-\vec r_a)$$

გასაშუალოებით მიიღება, სადაც აჯამვა ყველა ნაწილაკით ხდება.

$$\overline{n}(\vec r)=2C^2\left\{\psi_1(\vec r)^2+\psi_2(\vec r)^2+\Delta(\vec r)\right\}$$

სადაც $\Delta(\vec r)=\psi_1(\vec r)\psi_2^*(\vec r)\langle\psi_1|\psi_2\rangle+\psi_2(\vec r)\psi_1^*(\vec r)\langle\psi_2|\psi_1\rangle$

განსხვავებული ნაწილაკების შემთხვევაში

$$\overline{n}(\vec r)=2C^2\left\{\psi_1(\vec r)^2+\psi_2(\vec r)^2\right\}$$

9.22. ა) $A=\frac{1}{\sqrt2}$; ბ) $A=\frac{1}{2}$

9.23. ა) $\psi_{11}=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{a}$: $E_{11}=2K;\ K=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$

ბ) $\psi_{11}=\frac{\sqrt2}{a}\left[\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}+\sin\frac{\pi x_2}{a}\sin\frac{2\pi x_1}{a}\right]$; $\quad E_{11}=5K$

გ) $\psi_{11}=\frac{\sqrt2}{a}\left[\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}-\sin\frac{\pi x_2}{a}\sin\frac{2\pi x_1}{a}\right]$; $\quad E_{11}=5K$

9.24. $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d^2}{dx_1^2}+\frac{d^2}{dx_2^2}\right)$

9.25. ა) $\psi_{22}=\frac{2}{a}\sin\frac{2\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}$: $E_{22}=8K;\ K=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$. გადაუგვარებელია.

$\psi_{13}=\frac{2}{a}\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{3\pi x_2}{a}$: $E_{13}=10K$; ორჯერადად გადაგვარებულია.

$\psi_{31}=\frac{2}{a}\sin\frac{3\pi x_1}{a}\sin\frac{\pi x_2}{a}$: $E_{31}=10K$;

ბ) $\psi_{22}=\frac{2}{a}\sin\frac{2\pi x_1}{a}\sin\frac{2\pi x_2}{a}$: $E_{22}=8K$; გადაუგვარებელია.

$\psi_{13}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{3\pi x_2}{a}+\sin\frac{\pi x_2}{a}\sin\frac{3\pi x_1}{a}\right]$; $E_{13}=10K$ გადაუგვარებელია.

გ) $\psi_{13}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\frac{\pi x_1}{a}\sin\frac{3\pi x_2}{a}-\sin\frac{\pi x_2}{a}\sin\frac{3\pi x_1}{a}\right]$; $E_{13}=10K$ გადაუგვარებელია.

$\psi_{23}=\frac{\sqrt{2}}{a}\left[\sin\frac{2\pi x_1}{a}\sin\frac{3\pi x_2}{a}-\sin\frac{2\pi x_2}{a}\sin\frac{3\pi x_1}{a}\right]$; $E_{23}=13K$ გადაუგვარებელია.

9.26. ა) $\left\langle (x_1-x_2)^2\right\rangle=a^2\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)\right\}$

ბ) $\left\langle (x_1-x_2)^2\right\rangle=a^2\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)-\frac{128a^2m^2n^2}{\pi^4\left(m^2-n^2\right)^4}\right\}$

გ) $\left\langle (x_1-x_2)^2\right\rangle=a^2\left\{\frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{m^2}\right)+\frac{128a^2m^2n^2}{\pi^4\left(m^2-n^2\right)^4}\right\}$

9.2. მეორადი დაკვანტვის ფორმალიზმის ელემენტები

9.27. $\left[\hat{A},\hat{B}\right]=i/2$, სადაც $\hat{A}=\frac{1}{2}\left(\hat{a}+\hat{a}^+\right)$; $\hat{B}=\frac{1}{2i}\left(\hat{a}-\hat{a}^+\right)$;

9.28. $a=\alpha\hat{x}+\beta\hat{p}$; $\hat{a}=\alpha^\bullet\hat{x}+\beta^\bullet\hat{p}$. α და β-ს არჩევა არ არის ცალსახა.შეიძლება ავიღოთ, მაგალითად

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}L\ \ ;\quad \beta=\frac{iL}{\sqrt{2}}\hbar$$

$$\Psi_0(x)=\left(\pi L^2\right)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2L^2}}$$

9.29. ფერმიონებისათვის $\hat{a}$ ოპერატორის საკუთარი ფუნცქიაა $|0\rangle$ და საკუთარი მნიშვნელობაა 0, ხოლო $\hat{a}^+$ ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა $|1\rangle$ და საკუთარი მნიშვნელობაა 0.

ბოზონებისათვის $\hat{a}^+$ ოპერატორის საკუთარი ფუნქციებისა და საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას არ აქვს ამონახსნი.

ბოზონებისათვის $\hat{a}$ ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობაა ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი.

9.31. ფერმიონებისათვის $\hat{a}^2 = 0$, მაგრამ $\hat{a}'^2 = 2\alpha\hat{a} + \alpha^2 \neq 0$ და ამიტომ მითითებული გარდაქმნა არ არის უნიტარული. ბოზონებისათვის გარდაქმნა უნიტარულია და უნიტარულ ოპერატორს შემდეგი სახე აქვს

$$\hat{U} = e^{\alpha^{\bullet}\hat{a} - \alpha\hat{a}^{+}}$$

9.32. ფერმიონებისათვის $\alpha = \pm 1, \beta = 0$ და $\alpha = 0, \beta = \pm 1$

ბოზონებისათვის უნდა სრულდებოდეს პირობა: $\alpha^2 - \beta^2 = 1$. ამასთან $\beta^2 / \alpha^2 < 1$ და $\alpha^2 \geq 1$

9.33. ფერმიონებისათვის შეიძლება, ბოზონებისათვის არა.

9.34. C_f წარმოადგენს განსახილველი მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას f წარმოდგენაში.

9.35. $\overline{F} = \int \varphi^{\bullet}(\vec{r}) \hat{f} \varphi(\vec{r}) dV$

9.36. $\hat{a}^{+}_{f_i} = \sum\limits_k C(f_i, g_k) \hat{a}^{+}_{g_k}$; $\hat{a}_{f_i} = \sum\limits_k C^{*}(f_i, g_k) \hat{a}_{g_k}$

სადაც $C(f_i, g_k) = \int \Psi^{*}_{g_k} \Psi_{f_i} d\tau$

9.37.თუ $f_1 \neq f_2$, მაშინ $|2\rangle = \hat{a}^{+}_{f_1} \hat{a}^{+}_{f_2} |0\rangle$ ნორმირებულია ერთზე, როგორც ბოზონებისათვი,ასევე ფერმიონებისათვის.

ნორმირებული ტალღური ფუნქციებია კოორდინატულ წარმოდგენაში

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2) \pm \psi_{f_2}(\xi_1) \psi_{f_1}(\xi_2) \}$$

სადაც + და – შესაბამისად შეესამება ბოზონებს და ფერმიონებს, ხოლო $\xi = \vec{r}, \alpha$; α სპინური ცვლადია.

თუ $f_1 = f_2$, მაშინ ნორმირებულ ორნაწილაკოვან ბოზონურ მდგომარეობას შემდეგი სახე აქვს $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a^{+}_{f} \right)^2 |0\rangle$, ხოლო ფერმიონული მდგომარეობა არ არსებობს.

ნორმირებული ტალღური ფუნქციებია კოორდინატულ წარმოდგენაში ბოზონებისათვის

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2)$$

9.38. თუ $f_1 \neq f_2 \neq f_3$, მაშინ $|3\rangle = \hat{a}^{+}_{f_1} \hat{a}^{+}_{f_2} \hat{a}^{+}_{f_3} |0\rangle$ ნორმირებულია ერთზე, როგორც ბოზონებისათვი,ასევე ფერმიონებისათვის. ბოზონებისათვის ტალღური ფუნქცია ნაპოვნია 9.5 ამოცანაში, ხოლო ფერმიონებისათვის გვექნება

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \psi_{f_1}(\xi_1) & \psi_{f_1}(\xi_2) & \psi_{f_1}(\xi_3) \\ \psi_{f_2}(\xi_1) & \psi_{f_2}(\xi_2) & \psi_{f_2}(\xi_3) \\ \psi_{f_3}(\xi_1) & \psi_{f_3}(\xi_2) & \psi_{f_3}(\xi_3) \end{vmatrix}$$

10.1. ერთ და ორელექტრონიანი ატომების სტაციონალური მდგომარეობები.

10.1. შეშფოთების ოპერატორია

$$V(r)=\begin{cases}0, & r>R\\ \dfrac{Ze^2}{r}-\dfrac{Ze^2}{2R}\left(3-\dfrac{r^2}{R^2}\right), & r<R\end{cases} \qquad (1)$$

ხოლო ძირითადი მდგომარეობის შეუშფოთებელი ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi_0=\left(\frac{Z^3}{\pi a_0^3}\right)^{1/2} e^{-Zr/a_0}\,;\;\; a_0=\frac{\hbar^2}{m_e e^2}\approx 0{,}53\cdot 10^{-8}\text{ სმ} \qquad (2)$$

ენერგია კი არის

$$E_0^{(0)}=-\frac{m_e\left(Ze^2\right)^2}{2\hbar^2} \qquad (3)$$

$$\Delta E_0=E_0^{(1)}=\int V(r)\left|\Psi_0(r)\right|^2 dV=\frac{2\pi}{5}Ze^2R^2\left|\Psi_0(0)\right|^2=\frac{2}{5}Z^4\left(\frac{R}{a_0}\right)^2\frac{e^2}{a_0} \qquad (4)$$

$$\left|\frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(0)}}\right|=\frac{4}{5}Z^2\left(\frac{R}{a_0}\right)^2\approx 8\cdot 10^{-10}Z^{8/3} \qquad (5)$$

($R\approx 1{,}5Z^{1/3}\cdot 10^{-13}$ სმ). $Z=1$-თვის (5)-დან ვღებულობთ $\left|\dfrac{E_0^{(1)}}{E_0^{(0)}}\right|\approx 10^{-4}$.

10.2. $E_{nlj}^{(1)}=\langle H'\rangle=\dfrac{me^4}{\hbar^2}\left(\dfrac{e^2}{\hbar c}\right)^2\dfrac{1}{2n^3}\left(\dfrac{1}{l+1/2}-\dfrac{1}{j+1/2}\right)$

10.3. $\Delta E_{HFS}=E_{HFS}(J=I+1/2)-E_{HFS}(J=I-1/2)=\dfrac{4\pi e\hbar\mu_0(2I+1)\left|\Psi_0(0)\right|^2}{3mcI}$

10.4. ელექტრონებს შორის ურთიერთქმედების უგულებელყოფისას ატომურ ერთეულებში ჰელიუმისმაგვარი იონის ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi=\Psi_0(r_1)\Psi(r_2)=\frac{Z^3}{\pi}e^{-Z(r_1+r_2)} \qquad (1)$$

რომლის შესაბამისი დონეა

$$E_0^{(0)}=-Z^2 \qquad (2)$$

ენერგიის შესწორება შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იქნება

$$E_0^{(1)}=\int\frac{|\Psi|^2}{|\vec r_1-\vec r_2|}dV_1dV_2 \qquad (3)$$

და (1) - (3)-დან მივიღებთ

$$E_0\approx E_0^{(0)}+E_0^{(1)}=-Z^2+5Z/8 \qquad (4)$$

10.5. შეშფოთება იქნება

$$\hat V=\frac{1}{|\vec r_1-\vec r_2|}-\left(Z-Z_{eff}\right)\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right) \qquad (1)$$

და წინა (10.4) ამოცანის ანალოგიურად მივიღებთ

$$E_0^{(1)} = Z_{eff}\left(2Z_{eff} - 2Z + 5/8\right) \qquad (2)$$

ხოლო $E_0^{(1)} = 0$-დან მივიღებთ

$$Z_{eff} = Z - 5/16 \qquad (3)$$

და საბოლოოდ

$$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = -(Z - 5/16)^2 \qquad (4)$$

10.6. $\overline{E}\left(Z_{eff}\right) = Z_{eff}\left(Z_{eff} - 2Z + 5/8\right)$

ამ გამოსახულების Z_{eff} მინიმიზაციით ძირითადი დონის ენერგია იქნება

$$E_0 \approx \min \overline{E}\left(Z_{eff}\right) = -(Z - 5/16)^2$$

იონიზაციის პოტენციალი ტოლია $I = -Z^2/2 - E_0 = Z^2/2 - 5Z/8 + 25/256$

10.7. $$\overline{E}(\alpha,\beta) = 2C^2\left(\begin{array}{l} -Z(\alpha+\beta) + \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2} + \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \dfrac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha+\beta)^2} + \dfrac{20\alpha^3\beta^3}{(\alpha+\beta)^3} + \\ + 64\alpha^3\beta^3\,\dfrac{\alpha\beta - Z(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^6} \end{array}\right)$$

სადაც ნორმირების მუდმივა ტოლია

$$C^2 = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{64\alpha^3\beta^3}{(\alpha+\beta)^6}\right]^{-1}$$

10.8. ორთო მდგომარეობებში ელექტრონების ფარდობითი მოძრაობის მომენტი ღებულობს კენტ მნიშვნელობებს, ხოლო პარა მდგომარეობებში ლუწ მნიშვნელობებს.

10.9. $\overline{E} = \dfrac{5}{8}Z_{eff}^2 - \dfrac{5}{4}ZZ_{eff} + \dfrac{137}{729}Z_{eff}$

ამ გამოსახულების Z_{eff} მინიმიზაციით 2^3S დონის ენერგია იქნება

$$E\left(2^3S\right) = \min \overline{E} = -\frac{5}{8}\left(Z - \frac{1096}{7290}\right)^2 \approx -\frac{5}{8}(Z - 0{,}150)^2$$

ანუ $Z_{eff} \approx Z - 0{,}150$ და იონიზაციის პოტენციალი ტოლია $I = \dfrac{5}{8}(Z - 0{,}150)^2 - \dfrac{Z^2}{2}$

10.2. მრავალელექტრონიანი ატომები

10.10. ა) ${}^1P_1;\ {}^1P_{0,1,2}$ ბ) ${}^1S_0;\ {}^1P_{1,};\ {}^1D_2;\ {}^3S_1;{}^3P_{0,1,2};{}^3D_{1,2,3}$ გ) ${}^1P_{1,};\ {}^1D_2;\ {}^1F_3;{}^3P_{0,1,2};{}^3D_{1,2,3};{}^3F_{2,3,4}$

10.11. ა) ${}^1S_0;\ {}^1D_{2,};\ {}^3P_{0,1,2};\ {}^3S_1;$ბ) ${}^2P_{1/2,3/2};\ {}^2D_{3/2,,5/2};\ {}^4S_{3/2};$გ) ${}^1S_0;\ {}^1D_2;\ {}^3P_{0,1,2};$)

ა), ბ) და გ) შემთხვევებში ნორმალური თერმებია ${}^3P_{0,};\ {}^4S_{3/2}$ და ${}^3P_2$

10.12. აზოტის ატომის ძირითადი მდგომარეობის ელექტრონული კონფიგურაციაა $(1s)^2(2s)^2(2p)^3$ და ნორმალური თერმია ${}^4S_{3/2}$.

ქლორის ატომის ძირითადი მდგომარეობის ელექტრონული კონფიგურაციაა $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^5$ და ნორმალური თერმია ${}^2P_{3/2}$.

10.13 ა) $I=+1$ ბ) $I=(-1)^k$ გ) $I=+1$

10.14. $N=4C_{2l+1}^3=\dfrac{4(2l+1)!}{3(2l-2)!}$

10.16.
$$\bar{r}=C_nZ^{-n/3}$$
სადაც
$$C_n=b^n\int_0^\infty x^{n+2}\left[\frac{\chi(x)}{x}\right]^{\frac{3}{2}}dx$$
და $\chi(x)$ ტომას-ფერმის მოდელის უნივერსალური ფუნქციაა.

10.17.
$$dn(p)=\frac{3}{128Z}\left\{g\left[\left(\frac{3\pi p^3}{32Z^2}\right)^{2/3}\right]\right\}^3d^3p$$
სადაც
$$g(x)=\frac{x}{\chi(x)}$$

10.18. $n=\dfrac{2}{\pi}\sqrt{2b}Z^{1/3}\displaystyle\int_0^\infty\sqrt{\frac{\chi(x)}{x}}dx\propto Z^{1/3}$

10.19. კინეტიკური ენერგია არის
$$T=\frac{3}{10}\left(3\pi^2\right)^{2/3}\int n^{5/3}(r)dV$$
ელექტრონების ერთმანეთთან ურთიერთქმედების ენერგიაა
$$U_1=\frac{Z}{2}\int\frac{n(r)}{r}dV-\frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{4}\int n^{5/3}(r)dV$$
ელექტრონების ბირთვთან ურთიერთქმედების ენერგიაა
$$U_2=-Z\int\frac{n(r)}{r}dV\ 3$$

10.20. $E[n(r)]=\dfrac{3\left(3\pi^2\right)^{2/3}}{10}\displaystyle\int n^{5/3}dV-Z\int\frac{n}{r}dV+\frac{1}{2}\iint\frac{n(r)n(r')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dVdV'$

10.3. ორატომიანი მოლეკულა

10.22. ა) Σ_g^+; ბ) Σ_u^+; გ) Σ_g^-; დ) Σ_u^-

10.23. შესაძლო თერმებია: $2\,{}^2\Sigma_g^+, 2\,{}^2\Sigma_u^+, {}^2\Pi_g, {}^2\Pi_u$. ციფრი 2 სიმბოლ Σ-ის წინ ნიშნავს, რომ არსებობს ორი სხვადასხვა თერმი შესაბამისი კვანტური რიცხვებით.

10.24. შესაძლო თერმებია:

1) N_2 -ის ${}^{1,5}\Sigma_g^+, {}^{3,7}\Sigma_u^+$

2) LiH -ის ${}^{1,3}\Sigma^+$

3) HCl -ის ${}^{1,3}\Sigma^+, {}^{1,3}\Pi$

4) NO-ის ${}^{2,4,6}\Sigma^+$, ${}^{2,4,6}\Pi$

10.25. არ არის შესაძლებელი.

10.26. არ არის შესაძლებელი.

10.27. ა) $(I_0)_{HD} \approx 4{,}5$ ევ. ბ) $(I_0)_{D_2} \approx 4{,}54$ ევ.

ბ) $(\hbar\omega_e)_{HD} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}(\hbar\omega_e)_{H_2} = 0{,}46$ ევ. $(\hbar\omega_e)_{D_2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(\hbar\omega_e)_{H_2} = 0{,}38$ ევ.

გ) $(B_e)_{HD} = \frac{3}{4}(B_e)_{H_2}$; $(B_e)_{D_2} = \frac{1}{4}(B_e)_{H_2}$

10.28. $E_0(R,\alpha) = \frac{\alpha^2}{2R^2} - \frac{1}{R}\left[3 - 2(2+\alpha)e^{-\alpha}\right]$

10.29. $R_0 = 1{,}97$ ატომ.ერთ, $E_0 \approx -0{,}47$ ატომ.ერთ, $W_0 \approx 0{,}008$ ატომ.ერთ. არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ არსებობს H_2^+ სტაბილური იონი.

10.30. $E_2 = \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{2(\Delta E_2 - \Delta E_1)} = 0{,}3$ მევ.

10.31. $\Delta E = \hbar\omega(1-2x) = 0{,}514$ ევ.; 33,7-ჯერ მეტია.

10.32. 13 დონე.

10.33. გვექნება ორი σ ელექტრონი და ოთხ-ოთხი π და δ ელექტრონები.

10.34. ა) ${}^1\Sigma$; ბ) ${}^1\Sigma$ და ${}^3\Sigma$; გ) ${}^1\Pi$ და ${}^3\Pi$; დ) ${}^1\Sigma$, ${}^3\Sigma$ და ${}^1\Delta$; ე) ${}^1\Sigma$, ${}^3\Sigma$, ${}^1\Delta$ და ${}^3\Delta$.

10.35. $M_z = \Omega\hbar$, სადაც Ω ტოლია: 0 ${}^1\Sigma$-თვის, 1 ${}^3\Sigma$-თვის, $1/2$ და $3/2$ ${}^2\Pi$-თვის.

10.36. $\Lambda = 0{,}1$; $S = 1/2,\ 3/2$. გვექნება შემდეგი თერმები: ${}^2\Sigma,\ {}^4\Sigma,\ {}^2\Pi_{3/2,1,2}$ და ${}^4\Pi_{5/2,3,2,1/2,-1/2}$

11. მოძრაობა მაგნიტურ ველში

11.1. ვექტორულ პოტენციალს ედება ე.წ. კულონის ყალიბრება

$$div\vec{A} = 0$$

11.2. $[\hat{v}_i, \hat{v}_k] = \frac{ie\hbar}{\mu^2 c}\varepsilon_{ikl}H_l$; $[\hat{v}_i, \hat{x}_k] = -\frac{i\hbar}{\mu}\delta_{ik}$

11.3. $\hat{x}_0 = \hat{x} - \frac{1}{\omega}\hat{v}_y$, სადაც $\omega = \frac{-eH}{\mu c}$ და $\hat{v}_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c}A_y$

$$\hat{y}_0 = \hat{y} + \frac{1}{\omega}\hat{v}_x \text{ და } \hat{v}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x$$

$$\hat{\rho}_0^2 = \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 \qquad \hat{\rho}^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2\right)$$

11.4. $\left[\hat{H}, \hat{x}_0\right] = \left[\hat{H}, \hat{y}_0\right] = \left[\hat{H}, \hat{\rho}_0^2\right] = \left[\hat{H}, \hat{\rho}^2\right] = 0$

$$[\hat{x}_0, \hat{y}_0] = -\frac{i\hbar c}{eH}; \quad \left[\hat{\rho}_0^2, \rho^2\right] = 0$$

11.5. ა) $\Psi_{np_yp_z}(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right]\Psi_n^{osc}\left(x - \frac{cp_y}{eH_0}\right)$ (1)

$$E_{np_z}=\frac{|e|\hbar H_0}{\mu c}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_z^2}{2\mu}; \qquad n=0,1,2,... \tag{2}$$

სადაც Ψ_n^{osc} ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ტალღური ფუნქციაა.

ბ) $$\Psi_{np_xp_z}(x,y,z)=\frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_xx+p_zz)\right]\Psi_n^{osc}\left(y+\frac{cp_x}{eH_0}\right) \tag{3}$$

ენერგია ცხადია არ იქნება დამოკიდებული ვექტორული პოტენციალის ყალიბრებაზე და ამიტომ ისევ (2) ფორმულით მოიცემა.

11.6. $$\Psi_{np_xp_z}(x,y,z)=\exp\left(-\frac{ieH}{\hbar c}xy\right)\int C_{p_x}^{p_y}(n)\Psi_{np_yp_z}dp_y$$

სადაც $C_{p_x}^{p_y}$ მითითებაში აღნიშნული გაშლის კოეფიციენტებია.

11.7. $$\Psi_{nmp_z}(\rho,\varphi,z)=C\left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|}\exp\left[im\varphi+\frac{i}{\hbar}p_zz-\frac{\rho^2}{4a^2}\right]F\left(-r,|m|+1,\frac{\rho^2}{2a^2}\right) \tag{1}$$

სადაც $m=0,\pm1,\pm2,...$ მაგნიტური კვანტური რიცხვია, $a=\sqrt{\frac{\hbar c}{|e|H_0}}>0$, ხოლო r განისაზღვრება ტოლობიდან

$$2r+1+|m|-\frac{e}{|e|}m=2n+1,\ n=0,1,2,... \tag{2}$$

$$E=\hbar\omega_0(n+1/2)+\frac{p_z^2}{2\mu}; \qquad \omega_0=\frac{|e|H_0}{\mu c} \tag{3}$$

(1) ტალღური ფუნქცია აღწერს ნაწილაკის სტაციონალურ მდგომარეობას ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, რომელიც ლოკალიზებულია განივი მიმართულებით და ამიტომ შესაძლოა მისი ნორმირება x,y სიბრტყეში.

11.8. $\hat{\rho}_0^2$-ის საკუთარი მნიშვნელობებია

$$(\rho_0^2)_k=a^2(2k+1);\ k=0,1,2,...;\ a^2=\frac{\hbar c}{|e|H_0}$$

$\hat{\rho}^2$-ის საკუთარი მნიშვნელობებია

$$(\rho^2)_n=a^2(2n+1);\ n=0,1,2,...;\ a^2=\frac{\hbar c}{|e|H_0}$$

11.9. 11.7 ამოცანაში მიღებული (1) ტალღური ფუნქციიდან მიიღება $m=-\frac{e}{|e|}n$-თვის

$$|\Psi_n|^2=C^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n}e^{-\frac{\rho^2}{2a^2}} \tag{1}$$

საიდანაც (1)-ის ერთზე ნორმირების პირობიდან მიიღება

$$C^2=\frac{1}{\pi a^2 2^{n+1}\Gamma(n+1)} \tag{2}$$

ხოლო $\langle\rho\rangle$ და $\langle\rho^2\rangle$ საშუალოებისათვის გვექნება

$$\langle \rho \rangle = 2\pi \int_0^\infty \rho |\Psi_n|^2 \rho d\rho = a\sqrt{2}\,\frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \tag{3}$$

$$\langle \rho^2 \rangle = 2\pi \int_0^\infty \rho^3 |\Psi_n|^2 d\rho = 2a^2(n+1) \tag{4}$$

ρ სიდიდის მიხედვით $W = 2\pi\rho|\Psi_n|^2$ ალბათობის სიმკვრივეს მაქსიმუმი აქვს წერტილში

$$\rho_{\max} = a\sqrt{2n+1} \tag{5}$$

11.10. $\Psi_{np_yp_z}(x,y,z) = \dfrac{1}{2\pi\hbar}\exp\left[\dfrac{i}{\hbar}\left(p_y y + p_z z\right)\right]\Psi_n^{osc}\left(x - \dfrac{cp_y}{eH_0} - \dfrac{\mu c^2\varepsilon}{eH^2}\right)$

$$E = \hbar\omega_0(n+1/2) + \frac{p_z^2}{2\mu} - \frac{c\varepsilon p_y}{\mathrm{H}} - \frac{\mu c^2\varepsilon^2}{2H^2};\ n = 0,1,2...$$

$$\omega_0 = \frac{|e|H}{\mu c}$$

სადაც Ψ_n^{osc} ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ტალღური ფუნქციაა.

11.11. თუ z ღერძს მივმართავთ პარალელური ელექტრული და მაგნიტური ველების გასწვრივ, მაშინ ნაწილაკის ჰამილტონიანი მხოლოდ $-e\varepsilon z$ დამატებითი წევრით განსხვავდება 11.7 ამოცანის ჰამიტონიანისაგან. ამავე დროს ნარჩუნდება ნაწილაკის "განივი" და "გასწვრივი" მოძრაობები ნაწილაკისა, ოღონდ ახლა გასწვრივი მოძრაობა შეესაბამება ნაწილაკის ერთგვაროვან ველში მოძრაობას, განსხვავებით თავისუფალი მოძრაობისა 11.7 ამოცანაში. ამიტომ 11.7 ამოცანის ენერგიის (3) ფორმულაში $\dfrac{p_z^2}{2\mu}$ წევრი უნდა შევცვალოთ E_l გასწვრივი მოძრაობის ენერგიით ერთგვაროვან ველში, ხოლო 11.7 ამოცანის (1) ფორმულის გამოსახულებაში ბრტყელი ტალღა $\exp\left[\dfrac{i}{\hbar}p_z z\right]$, $\Psi_{E_l}(z)$ ეირის ფუნქციით (იხ. ამოცანა 2.74)

11.12. ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi_{Emn_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}\Psi_{n_2}^{osc}(z) f_{n_1 m}(\rho);\ n_2 = 0,1,... \tag{1}$$

სადაც

$$f_{n_1 m}(\rho) = C\left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2}} F\left(-n_1, |m|+1, \frac{\rho^2}{2a^2}\right);\ n_1 = 0,1,... \tag{2}$$

ენერგია კი იქნება

$$E_{n_1 m n_2} = -\frac{e\hbar H m}{2\mu c} + \hbar\sqrt{\omega^2 + \frac{e^2H^2}{4\mu^2c^2}}\left(2n_1 + |m| + 1\right) + \hbar\omega\left(n_2 + \frac{1}{2}\right);\ \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \tag{3}$$

სუსტი ველების შემთხვევაში, როცა $\dfrac{|e|H}{\mu c} << \omega$, (3)-დან მიიღება

$$E_{n_1 m n_2} \approx E_N^{(0)} - \frac{e\hbar m}{2\mu c}H + \frac{e^2\hbar\left(2n_1 + |m| + 1\right)}{8\mu^2 c^2 \omega}H^2 \qquad (4)$$

(4) გამოსახულებაში $E_N^{(0)} = \hbar\omega(N + 3/2)$ აღწერს შეუშფოთებელ ოსცილატორს, ამასთან $N = 2n_1 + |m| + n_2$. H-ის მიხედვით წრფივი წევრი შეესაბამება ოსცილატორის მაგნიტური მომენტის ურთიერთქმედებას მაგნიტურ ველთან, ხოლო H^2 კვადრატული წევრი განსაზღვრავს ენერგიის წანაცვლების დიამაგნიტურ ნაწილს.

სუსტი ველების შემთხვევაში, როცა $\frac{|e|H}{\mu c} >> \omega$, (3)-დან მიიღება

$$E_{n_1 m n_2} \approx E_{l,n} + \frac{\hbar\omega^2}{\omega_H}\left(2n_1 + |m| + 1\right) + E_{l,n_2} \qquad (5)$$

ამ შემთხვევაში სპექტრის "განივი" ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება მაგნიტური ვეილს მოქმედებით და $E_{l,n} = \hbar\omega(n + 1/2)$ ლანდაუს დოონებია, სადაც $n = n_1 + \frac{|m|}{2} - \frac{em}{2|e|}$. მეორე წევრი (5) გამოსახულებაში წარმოადგენს შესწორებას, რომელსაც იძლევა დრეკადი ძალის ზემოქმედება ნაწილაკის განივ მოძრაობაზე, ბოლო წევრი კი (5) გამოსახულებაში $E_{\ln_2} = \hbar\omega(n_2 + 1/2)$ შეესაბამება თავისუფალი რხევების ენერგიას მაგნიტური ველის გასწვრივ.

11.13.
$$\Psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi};\ m = 0, \pm1, \pm2, ... \qquad (1)$$

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} - \frac{e\hbar H m}{2\mu c};\ I = \mu a^2 \qquad (2)$$

11.14. დავუშვათ არსებობენ ლოკალიზებული სტაციონალური მდგომარეობები. მაშინ მათი ენერგია $E > 0$, რადგანაც $\hat{H} = \left(\hat{p} - e\vec{A}/c\right)^2$ ჰამილტონიანის საკუთარი მნიშვნელობები დადებითი სიდიდეებია. ამოცანის პირობის თანახმად $\vec{H}(\vec{r}) \to 0$ დიდ მანძილებზე, ამიტომ ვექტორული პოტენცილიც ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ ისიც ნულისკენ მიდიოდეს უსასრულობაში, რის გამოც შრედინგერის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\frac{1}{2\mu}\hat{\vec{p}}^2\psi = E\psi \qquad (1)$$

რომელიც აღწერს თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობას ანუ არ გვაქვს ლოკალიზებული სტაციონალური მდგომარეობები, რაც ეწინააღმდეგება საწყისს დაშვებას.

11.15. ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi_{ps_z} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} \chi_{s_z} \qquad (1)$$

სადაც სპინური ფუნქციები ტოლია

$$\chi_{s_{z=+\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\quad \chi_{s_{z=-\frac{1}{2}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

ხოლო ენერგია კი იქნება

$$E=\frac{p^2}{2\mu}-2\mu_0 H s_z \tag{3}$$

11.16. ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi_{Es_z}=f(\rho,\varphi)\chi_{s_z} \tag{1}$$

სადაც χ_{s_z} სპინური ფუნქციაა და $f(\rho,\varphi)$ ფუნქციის განსასზღვრავად ამოცანა დადის შრედინგერის განტოლებაზე შემდეგ ორგანზომილებიან ველში

$$U(\rho)=\begin{cases}-2\mu_0 H s_z=-U_0; & \rho<R\\ 0 & \rho>R\end{cases} \tag{1}$$

სადაც μ_0 ნეიტრონის მაგნიტური მომენტია, R კი სოლენოიდის რადიუსი. ნეიტრონისათვის $\mu_0<0$, ამიტომ $s_z=+1/2$-თვის (1) პოტენციალი წარმოადგენს პოტენციალურ ბარრიერს და არ გვექნება დისკრეტული სპექტრი. $s_z=-1/2$-თვის $U(\rho)$ პოტენციალი პოტენციური R რადიუსიანი ორმოა $U_0=|\mu_0 H|$ სირღმით. სტაციონალური მდგომარეობები ასეთ ორმოში შესწავლილი გვაქვს 4.48 და 4.49 ამოცანებში.

11.17. მითითებაში მოცემული პირობების გამო ტალღურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე

$$\Psi_{Ep_z m s_z}=\frac{1}{2\pi\sqrt{\hbar}}\exp\left[i\left(m\varphi+\frac{p_z z}{\hbar}\right)\right]f(\rho)\chi_{s_z} \tag{1}$$

სადაც χ_{s_z} სპინური ტალღური ფუნქციაა და $f(\rho)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}\right]f-2\mu_0 s_z H(\rho)f=\left(E-\frac{p_z^2}{2\mu}\right)f \tag{2}$$

11.18.

$$\Psi_{np_y p_z s_z}=\Psi_{np_y p_z}(x,y,z)\chi_{s_z} \tag{1}$$

$$E_{np_z s_z}=\frac{\hbar|e|H_0}{\mu c}\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{p_z^2}{2\mu}-2\mu_0 H_0 s_z \tag{2}$$

11.19. სხვა $s=1/2$ სპინიანი ნაწილაკებისათვის, რომელთათვისაც $\mu_0\neq\frac{e\hbar}{2\mu c}$,არ არის სამართლიანი ჰამილტონიანის ამოცანის პირობაში მოცემული სახით ჩაწერა.

11.20. სხვა $s=1/2$ სპინიანი ნაწილაკებისათვის, რომელთათვისაც $\mu_0\neq\frac{e\hbar}{2\mu c}$, არ შენარჩუნდება ეს შედეგი.

11.22. სპინური ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულებას ასე გამოიყურება

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix}C_1(0)e^{iwt}\\ C_2(0)e^{-iwt}\end{pmatrix} \tag{1}$$

სადაც $C_{1,2}(0)$ მუდმივები განისაზღრებიან საწყისი პირობებიდან და ტალღური ფუნქციის ნორმირების მოთხოვნის გამო აკმაყოფილებენ პირობას

$$|C_1|^2+|C_2|^2=1 \tag{2}$$

სპინის ვექტორის კომპონენტების საშუალო მნიშვნელობები ტოლია:

$$\begin{aligned}\langle s_x(t)\rangle &= \langle s_x(0)\rangle\cos 2\omega t+\langle s_y(0)\rangle\sin 2\omega t\\ \langle s_y(t)\rangle &= \langle s_x(0)\rangle\cos 2\omega t-\langle s_y(0)\rangle\sin 2\omega t\\ \langle s_z(t)\rangle &= \langle s_x(0)\rangle = const\end{aligned} \tag{3}$$

საიდანაც ჩანს, რომ $\vec{s}(t)$ ვექტორი პრეცესირებს მაგნიტური ველის ირგვლივ 2ω კუთხური სიჩქარით.

11.23. სპინური ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულებას ასე გამოიყურება

$$\Psi(t)=\begin{pmatrix}C_1(0)e^{i\xi t}\\ C_2(0)e^{-i\xi t}\end{pmatrix} \tag{1}$$

სადაც

$$\xi(t)=\frac{\mu}{\hbar}\int_0^t H(t)dt \tag{2}$$

ხოლო სპინის ვექტორის კომპონენტების საშუალო მნიშვნელობები ისევ წინა 11.22 ამოცანის (3) ფორმულებით მოიცემა, ოღონდ ωt უნდა შევცვალოთ $\xi(t)$-თი, ასე რომ ამ შემთხვევაში $\vec{s}(t)$ ვექტორი პრეცესირებს მაგნიტური ველის ირგვლივ ზოგად შემთხვევაში არათანაბრად.

11.24. ნორმირებული სპინური ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(t)=\frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix}\left[(\omega+\gamma_1)e^{iwt}+(\omega-\gamma_1)e^{-iwt}\right]e^{-i\omega_0 t/2}\\ 2i\gamma_2\sin\omega t\cdot e^{i\omega_0 t/2}\end{pmatrix} \tag{1}$$

სადაც

$$\gamma_1=\frac{\mu H_0}{\hbar}+\frac{\omega_0}{2};\ \gamma_2=\frac{\mu H_1}{\hbar};\ \omega=\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2} \tag{2}$$

ამიტომ სპინის გადაბრუნების ალბათობა ანუ t მომენტში იმის ალბათობა, რომ სპინის პროექცია იყოს $s_z=-1/2$ იქნება

$$W=g\sin^2\omega t \tag{2}$$

სადაც

$$g=\left(\frac{\gamma_2}{\omega}\right)^2=\frac{H_1^2}{H_1^2+\left(H_0+\frac{\hbar\omega_0}{2\mu}\right)^2} \tag{3}$$

11.25. $\langle\mu\rangle=\frac{e\hbar}{2\mu c}\langle l\rangle-\frac{e^2}{2\mu c^2}\left\langle\left[\vec{r}\vec{A}\right]\right\rangle$

11.26. $j_\rho=0,\ j_z=\frac{ep_z}{\mu}\left|\Psi_{nmp_z}\right|^2,\ \ j_\varphi=\left(\frac{e\hbar m}{\mu\rho}-\frac{e^2H_0\rho}{2\mu c}\right)\left|\Psi_{nmp_z}\right|^2$

11.27. $j_\rho = j_z = 0,\ j_z = -2\mu_0 c s_z \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left|\Psi_{nmp_z}\right|^2$

11.28.
$$\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\left[\langle\vec{\sigma}\rangle\nabla f(r)\right] \qquad (1)$$
სადაც
$$f(r) = \frac{1}{r} - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{2R}{a}} \qquad (2)$$
და
$$a = \frac{\hbar^2}{Ze^2\mu} \qquad (3)$$
მაგნიტური $\vec{H} = rot\vec{A}$ ველისათვის კი სათავეში და დიდ მანძილებზე გვექნება
$$\vec{H}(0) = \frac{8\mu_0\langle\vec{\sigma}\rangle}{3a^3} \qquad (4) \qquad \vec{H}(\vec{r})\underset{r\to\infty}{\approx} \frac{3(\vec{\mu}\vec{r})\vec{r} - \vec{\mu}r^2}{r^5} \qquad (5)$$
როგორც (5) ფორმულიდან ჩანს ატომიდან დიდ მანძილებზე ველი წარმოადგენს მაგნიტური დიპოლის ველს $\vec{\mu} = \mu_0\langle\vec{\sigma}\rangle$ მაგნიტური მომენტით.

11.29. $\vec{H} = \dfrac{8\pi\mu_0}{3}\langle\vec{\sigma}\rangle|\psi(0)|^2$

დამატება

A. ზოგიერთი განსაზღვრული და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

ვაჩვენოთ, რომ
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi} \qquad \textbf{(A.1)}$$
განვიხილოთ ორი ერთნაირი ინტეგრალის ნამრავლი, რომელშიც გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე.გვექნება
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty} e^{-r^2}rdr = 2\pi\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-r^2}d\left(r^2\right) = \pi$$
საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი **(A.1)** თანაფარდობა.

ასევე ადვილად მივიღებთ, რომ
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}};\quad a > 0 \qquad \textbf{(A.2)}$$
ცხადია, რომ ნებისმიერი მთელი k რიცხვისათვის

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = 0 \qquad \textbf{(A.3)}$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx \qquad \textbf{(A.3)}$$

ტიპის ინტეგრალები შეიძლება ავიღოთ a პარამეტრით გაწარმოების მეთოდით. მართლაც, განვიხილოთ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$ ინტეგრალის წარმოებული a პარამეტრით:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = -\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx \qquad \textbf{(A.4)}$$

მეორეს მხრივ

$$\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{\frac{3}{2}}} \qquad \textbf{(A.5)}$$

(A.4) და **(A.5)**-დან კი მივიღებთ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}} \quad a > 0 \qquad \textbf{(A.6)}$$

ასევე a პარამეტრით k-ჯერ გაწარმოებით მივიღებთ

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left(\sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{2k+1/2}}; \; a > 0; \; k = 0,1,2... \qquad \textbf{(A.7)}$$

სადაც $n!!$ აღნიშვნა ნიშნავს n-ის ლუწობის ყველა რიცხვის ნამრავლს 1 ან 2-დან n-მდე.

(A.7) გამოსახულებაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ლუწობის გამო გვექნება

$$\int_{0}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx \qquad \textbf{(A.8)}$$

ამიტომ ზემოთ განხილული ინტეგრალების ანალოგიურად მივიღებთ

$$\int_{0}^{\infty} x^{k} e^{-ax^2} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}; \; a > 0; \; k = 0,1,2... \qquad \textbf{(A.9)}$$

ასევე ადვილად ითვლება შემდეგი ინტეგრალები

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)} = \frac{\pi(2n-1)!!}{2^n \, n! a^{2n+1}}, \; a > 0 \qquad \textbf{(A.10)}$$

$$\int_{a}^{b} \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(x-b)} dx = \frac{\pi}{2}\left(a + b - 2\sqrt{ab}\right), \; 0 < a < b \qquad \textbf{(A.11)}$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \qquad \textbf{(A.12)}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2{,}31 & n = 1/2 \\ \pi^2/6 & n = 1 \\ 2{,}405 & n = 2 \\ \pi^4/15 & n = 3 \\ 24{,}9 & n = 4 \end{cases} \quad \textbf{(A.13)}$$

$$\int_0^\alpha \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0{,}225 & \alpha = 1 \\ 1{,}18 & \alpha = 2 \\ 2{,}56 & \alpha = 3 \\ 4{,}91 & \alpha = 5 \\ 6{,}43 & \alpha = 10 \end{cases} \quad \textbf{(A.14)}$$

$$\int x \sin^2(kx) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin(2kx)}{4k} - \frac{\cos(2kx)}{8k^2} \quad \textbf{(A.15)}$$

$$\int \sin(mx)\sin(nx) dx = \frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m-n)}; \; m^2 \neq n^2 \quad \textbf{(A.16)}$$

B. დირაკის დელტა ფუნქციის ზოგიერთი თვისება.

დირაკის დელტა ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას, რომელიც ასე განიმარტება

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases} \quad \textbf{(B.1)}$$

(B.1) გამოსახულებაში არ არის აუცილებელი ინტეგრების საზღვრები უსასრულო იყოს.საკმარისია, რომ ინტეგრების საზღვრები შეიცავდეს $x = 0$ წერტილს. დელტა ფუნქცია არ წარმოადგენს ფუნქციას მათემატიკაში განმარტებული ფუნქციის აზრით. კერძოდ, დელტა ფუნქცია განიმარტება არა როგორც არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის მისი სიდიდის მოცემით (როგორც ჩვეულებრივი ფუნქცია), არამედ მოიცემა ინტეგრაციის წესით უწყვეტ ფუნქციასთან გამრავლებისას. ამიტომ დელტა ფუნქციას აკუთვნებენ განზოგადებულ ფუნქციათა კლასს.

ნებისმიერი უწყვეტი $f(x)$ ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a) \quad \textbf{(B.2)}$$

აღვნიშნოთ რამდენიმე თანაფარდობა, რომელსაც აკმაყოფილებს დელტა ფუნქცია

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad \textbf{(B.3)}$$

$$x\delta(x) = 0 \quad \textbf{(B.4)}$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad \textbf{(B.5)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\delta(x-b) dx = \delta(a-b) \quad \textbf{(B.6)}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x - x_i)}{\left|\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_i}} \qquad \textbf{(B.7)}$$

სადაც x_i მარტივი ფესვებია $f(x) = 0$ განტოლების და n ნულების რაოდენობაა მთელ x ღერძზე. მაგალითად, **(B.7)** თანაფარდობის კერძო შემთხვევებია შემდეგი ფორმულები

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x); \qquad \textbf{(B.8)}$$

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2|a|}; \qquad \textbf{(B.9)}$$

(B.3)-(B.9) თანაფარდობების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი ერთნაირ შედეგებს იძლევიან, თუ ამ თანაფარდობების ორივე მხარეს ვაინტეგრებთ.

დელტა ფუნქცია აქვს შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \qquad \textbf{(B.10)}$$

დელტა ფუნქციის წარმოებულები განისაზღვრება ტოლობით

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0) \qquad \textbf{(B.11)}$$

სადაც n ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

შემდეგი თვისებები მკაცრად შეიძლება იქნას დამტკიცებული განზოგადებული ფუნქციების თეორიის ფარგლებში;

$$\delta^{(m)}(x) = (-1)^m \delta^{(m)}(-x) \qquad \textbf{(B.12)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x-y)\delta^{(n)}(y-a) dy = \delta^{(m+n)}(x-a) \qquad \textbf{(B.13)}$$

$$x^{m+1}\delta^{(m)}(x) = 0 \qquad \textbf{(B.14)}$$

პირველ წარმოებულს $\delta'(x)$ შემდეგი თვისებები აქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0) \qquad \textbf{(B.15)}$$

$$\delta'(x) = -\delta'(-x) \qquad \textbf{(B.16)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-y)\delta(y-a) dy = \delta'(x-a) \qquad \textbf{(B.17)}$$

$$x\delta'(x) = -\delta(x) \qquad \textbf{(B.18)}$$

$$x^2\delta'(x) = 0 \qquad \textbf{(B.19)}$$

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k e^{ikx} dk \qquad \textbf{(B.20)}$$

რადგანაც δ ფუნქცია ლუწი ფუნქციაა, ამიტომ სრულდება ტოლობა

$$\int_{0}^{a} \delta(x) dx = \begin{cases} 1/2; & a > 0 \\ -1/2; & a < 0 \end{cases} \qquad \textbf{(B.21)}$$

დელტა ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას, როგორც ზღვარი ჩვეულებრივი ფუნქციების მიმდევრობისა.კერძოდ

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}\varepsilon} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \quad \textbf{(B.22)}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \quad \textbf{(B.23)}$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \quad \textbf{(B.24)}$$

სამგანზომილებიანი δ ფუნქცია $\delta(\vec{r})$ განიმარტება ტოლობით

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k \quad \textbf{(B.25)}$$

სადაც ინტეგრება ტარდება k_x, k_y, k_z ცვლადების ყველა მნიშვნელობებით. $\delta(\vec{r})$ ფუნქციას შემდეგი თვისება გააჩნია

$$\int\int \delta(\vec{r}) F(\vec{r}) d^3r = F(0) \quad \textbf{(B.26)}$$

თუ ინტეგრება წარმოებს იმ არეში, რომელიც მოიცავს $\vec{r} = 0$ წერტილს. ასევე სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{2\pi r^2} \quad \textbf{(B.27)}$$

$$\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \frac{2}{r^2} \delta(\vec{n}' - \vec{n}) \delta(r' - r) \quad \textbf{(B.28)}$$

სადაც $\vec{n}'$ და $\vec{n}$ ერთეულოვანი ვექტორებია $\vec{r}'$ და $\vec{r}$ მიმართულებით.

C. სპეციალური ფუნქციები.

C.1. Γ-ფუნქცია

Γ-ფუნქცია წარმოადგენს ფაქტორიალის განზოგადებას

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \quad \textbf{(C.1.1)}$$

ფაქტორიალი განმარტებულია მხოლოდ მთელი დადებითი რიცხვებისათვის და აკმაყოფილებს ტოლობას

$$(n+1)! = (n+1)n! \quad \textbf{(C.1.2)}$$

ფაქტორიალი შეიძლება წარმოვადგინოთ ეილერის ინტეგრალის სახითაც

$$n! = \int_0^\infty e^{-t} t^n dt \quad \textbf{(C.1.3)}$$

თუ შევთანხმდებით, რომ $0! = 1$.

Γ-ფუნქცია საშალებას გვაძლევს განვაზოგადოთ **(C.1.2)** და **(C.1.3)** თანაფარდობანი ნებისმიერი კომპლექსური $z = x + iy$ რიცხვისათვის

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \textbf{(C.1.4)}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad \textbf{(C.1.5)}$$

თუ $\operatorname{Re} z > 0$. ასე განმარტებულ Γ-ფუნქციას აქვს პოლუსები უარყოფით ნამდვილ ღერძზე $z = -n$ $(n = 0,1,2...)$ წერტილებში და ნაშთი ამ წერტილებში $\dfrac{(-1)^n}{n!}$-ის ტოლია.

კერძო მნიშვნელობები

$$\Gamma(1) = 0! = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \qquad \textbf{(C.1.6)}$$

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!}\sqrt{\pi} \qquad \textbf{(C.1.7)}$$

სხვადასხვა არგუმენტების Γ-ფუნქციებს შორის კავშირი

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \textbf{(C.1.8)}$$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{2\pi} 3^{3z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right) \qquad \textbf{(C.1.9)}$$

კომპლექსური რიცხვის

$$\Gamma(x + iy) = \xi e^{i\eta} \qquad \textbf{(C.1.10)}$$

გამოსათვლელად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი გაშლებით

$$\xi = \Gamma(x)\prod_{0}^{\infty}\left[1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}\right]^{-1/2} \qquad \textbf{(C.1.11)}$$

და

$$\eta = y\left[-C + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{y} arctg \frac{y}{x+n-1}\right)\right] \qquad \textbf{(C.1.12)}$$

სადაც

$$C = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \ln\frac{1}{t} dt = 0,577215... \qquad \textbf{(C.1.13)}$$

ეილერის მუდმივაა. კერძო შემთხვევაში, როცა $x = 1$, გვაქვს

$$\xi^2 = |\Gamma(1 + iy)|^2 = \frac{\pi y}{sh \pi y} \qquad \textbf{(C.1.14)}$$

ასიმპტოტური ყოფაქცევა.

$|z| >> 1$ და $|\arg z| < \pi$-თვის შეიძლება გამოვიყენოთ სტირლინგის ფორმულა

$$\ln\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\ln z - z + \frac{1}{2}\ln 2\pi + O\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \textbf{(C.1.15)}$$

ან

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{z(\ln z - 1)} \qquad \textbf{(C.1.16)}$$

C.2. გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია. ზოგიერთი ინტეგრალი გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებით.

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია განიმარტება შემდეგი მწკრივით

$$F(a,c;z) = 1 + \frac{a}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)}\frac{z}{2!} + \dots \qquad \textbf{(C.2.1)}$$

სადაც a და c ნებისმიერი პარამეტრებია, გარდა $c = -n;\ n = 0,1,2\dots$ როცა $a = c$, მაშინ $F(a,c;z)$ ფუნქცია ექსპონენციალურ ფუნქციაში გადადის

$$F(a,a;z) = e^z \qquad \textbf{(C.2.2)}$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია წარმოადგენს ერთ-ერთ კერძო ამონახსნს შემდეგი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისა

$$z\frac{d^2\Phi}{dz^2} + (c-z)\frac{d\Phi}{dz} - a\Phi = 0 \qquad \textbf{(C.2.3)}$$

ანუ $\Phi_1 = F(a,c;z)$. როცა c არ არის მთელი რიცხვი, მაშინ **(C.2.3)** განტოლების მეორე დამოუკიდებელი ამონახსნია

$$\Phi_2 = z^{1-c}F(a-c+1,2-c;z) \qquad \textbf{(C.2.4)}$$

ამ შემთხვევაში **(C.2.3)** განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$\Phi = A\Phi_1 + B\Phi_2 \qquad \textbf{(C.2.5)}$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია. $F(a,c;z)$ ფუნქცია რეგულარულია $z = 0$ წერტილში და $F(a,c,0) = 1$.ის აკმაყოფილებს ე.წ.*კუმერის* თანაფარდობას

$$F(a,c,z) = e^z F(c-a,c;-z) \qquad \textbf{(C.2.6)}$$

$F(a,c;z)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობებსაც:

$$(c-a)F(a-1,c;z) + (2a-c+z)F(a,c;z) = aF(a+1,c;z) \qquad \textbf{(C.2.7)}$$

$$(a-c+1)F(a,c;z) + (c-1)F(a,c-1;z) = aF(a+1,c;z) \qquad \textbf{(C.2.8)}$$

$$\frac{d}{dz}F(a,c;z) = \frac{a}{c}F(a+1,c+1;z) \qquad \textbf{(C.2.9)}$$

თუ თანმიმდევრობით გამოვიყენებთ **(C.2.7) - (C.2.9)** ფორმულებს, მივიღებთ

$$\frac{d^n}{dz^n}F(a,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)}F(a+n,c+n;z) \qquad \textbf{(C.2.10)}$$

თუ $a = -n;\ n = 0,1,2\dots$, მაშინ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია დადის n რიგის პოლინომზე

$$F(-n,c;z) = 1 - \frac{n}{c}\frac{z}{1!} + \frac{n(1-n)}{c(c+1)}\frac{z}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{(c-1)!}{(c+n-1)!}z^n \qquad \textbf{(C.2.11)}$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია **(C.2.11)** დაკავშირებულია *განზოგადებულ ლაგერის პოლინომებთან* შემდეგი ტოლობით

$$L_n^c(z) = \frac{\Gamma(c+n+1)}{\Gamma(c+1)}F(-n,c+1;z) \qquad \textbf{(C.2.12)}$$

განზოგადებულ ლაგერის პოლინომებს $c=0$ დროს ეწოდებათ ლაგერის პოლინომები და აღინიშნებიან ასე $L_n(z)$. **(C.2.11)** და **(C.2.12)**-დან კი გვექნება

$$L_n(z)=e^z\frac{d^n}{dz^n}\left(z^ne^{-z}\right)=\Gamma(n+1)F(-n,1;z) \qquad \textbf{(C.2.13)}$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ყოფაქცევა მცირე z-ებისთვის განისაზღვრება **(C.2.1)** მწკრივის პირველი წევრებით, ხოლო დიდი z-ებისთვის გვაქვს

$$F(a,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}z^{a-c}e^z\left[1+O\left(|z|^{-1}\right)\right] \quad \text{თუ } \operatorname{Re}z\to\infty \qquad \textbf{(C.2.14)}$$

$$F(a,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)}(-z)^{-a}\left[1+O\left(|z|^{-1}\right)\right] \quad \text{თუ } \operatorname{Re}z\to-\infty \qquad \textbf{(C.2.15)}$$

როდესაც $F(a,c;z)$ ფუნქციის არგუმენტი z შემოსაზღრულია, ხოლო ერთ-ერთი პარამეტრი უსასრულოდ იზრდება,გვაქვს შემდეგი ასიმპტოტური გაშლები

$$F(a,c;z)=1+O\left(|c|^{-1}\right), \text{ თუ } z \text{ და } a \text{ სასრულოა,ხოლო } c\to\infty \qquad \textbf{(C.2.16)}$$

$$F(a,c;z)=e^z\left[1+O\left(|c|^{-1}\right)\right], \text{ თუ } c-a \text{ და } z \text{ სასრულოა,ხოლო } c\to\infty \qquad \textbf{(C.2.17)}$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის დიდი მნიშვნელობა ფიზიკაში იმასთანაა დაკავშირებული, რომ ამ ფუნქციის საშუალებით გამოისახება მრავალი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. მაგალითად, განვიხილოთ განტოლება

$$(a_0x+b_0)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+(a_1x+b_1)\frac{d\varphi}{dx}+(a_2x+b_2)\varphi=0 \qquad \textbf{(C.2.18)}$$

როცა $a_0=a_1=a_2=0$ ამ განტოლების ამონახსნი გამოიხატებაელემენტარული ფუნქციებით და ამიტომ მას არ განვიხილავთ. **(C.2.18)** განტოლება

$$\varphi=e^{\nu x}\Phi,\ x=\lambda z+\mu \qquad \textbf{(C.2.19)}$$

ჩასმით შემდეგ განტოლებაზე დადის

$$(\alpha_0z+\beta_0)\frac{d^2\Phi}{dz^2}+(\alpha_1z+\beta_1)\frac{d\Phi}{dz}+(\alpha_2z+\beta_2)\Phi=0 \qquad \textbf{(C.2.20)}$$

სადაც

$$\alpha_0=\frac{a_0}{\lambda},\ \alpha_1=A_1,\ \alpha_2=\lambda A_2; \qquad \textbf{(C.2.21)}$$

$$\beta_0=\frac{a_0\mu+b_0}{\lambda^2},\ \beta_1=\frac{\mu A_1+B_1}{\lambda},\ \beta_2=\mu A_2+B_2; \qquad \textbf{(C.2.22)}$$

$$A_1=2a_0\nu+a_1,\ A_2=a_0\nu^2+a_1\nu+a_2; \qquad \textbf{(C.2.23)}$$

$$B_1=2b_0\nu+b_1,\ B_2=b_0\nu^2+b_2\nu+b_2; \qquad \textbf{(C.2.24)}$$

თუ λ,μ და ν კოეფიციენტებს ისე განვსაზღვრავთ, რომ სრულდებოდეს პირობები

$$a_0\mu+b_0=0,\ a_0+\lambda A_1=0,\ A_2=0 \qquad \textbf{(C.2.25)}$$

მაშინ **(C.2.20)** განტოლება ემთხვევა **(C.2.3)** განტოლებას. ამიტომ **(C.2.18)** ტიპის ნებისმიერი განტოლება დადის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების **(C.2.3)** განტოლებაზე, თუ მოხერხდა λ, μ და ν კოეფიციენტების ისე შერჩევა, რომ კმაყოფილდებოდეს **(C.2.25)** განტოლება, ხოლო შემდეგ გამოვიყენებთ **(C.2.19)** ჩასმას.

$$\Phi = z^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{z}{2}} W,\ a = \frac{1}{2} - k + \mu,\ c = 1 + 2\mu \qquad \textbf{(C.2.26)}$$

ჩასმით **(C.2.3)** განტოლება დადის *უიტეკერის* განტოლებაზე

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) W = 0 \qquad \textbf{(C.2.27)}$$

უიტიკერის $W_{k\mu}(z)$ ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს **(C.2.27)** განტოლებას, განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალით

$$W_{k\mu}(z) = \frac{z^k e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \mu\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+\mu} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+\mu} e^{-t} dt \qquad \textbf{(C.2.28)}$$

k და μ-ს ყველა მნიშვნელობასითავის, ხოლო z-თვის ასევე დასაშვებია ყველა მნიშვნელობა, გარდა ნამდვილი უარყოფითი მნიშვნელობა. თუ $W_{k\mu}(z)$ ფუნქცია **(C.2.27)** განტოლების ამონახსნია, მაშინ $W_{-k\mu}(-z)$-იც **(C.2.27)** განტოლების ამონახსნია, რადგანაც k და z-თვის ერთდროულად ნიშნების შეცვლისას არ იცვლება განტოლება. $W_{k\mu}(z)$ და $W_{-k\mu}(-z)$ ფუნქციები ადგენენ **(C.2.27)** განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტალურ სისტემას.

მრავალი ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს $W_{k\mu}(z)$ უიტეკერის ფუნქციით. ასე მაგალითად ლაგერის განზოგადებული პოლინომები წარმოადგენენ უიტეკერის ფუნქციების კერძო შემთხვევას, თუ მათში ავიღებთ

$$k = n + \frac{1}{2}(c+1);\ \mu = \frac{c}{2} \qquad \textbf{(C.2.29)}$$

ანუ

$$L_n^c(z) = (-1)^n z^{-\frac{c+1}{2}} e^{\frac{z}{2}} W_{n+\frac{c+1}{2}, \frac{c}{2}}(z) \qquad \textbf{(C.2.30)}$$

$c = \pm\frac{1}{2}$ დროს ლაგერის პოლინომები გადადიან *ერმიტის* პოლინომებში

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{z^2}{2}} \right) \qquad \textbf{(C.2.31)}$$

რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი განტოლების ამონახსნებს

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} + 2n \right) H_n(z) = 0 \qquad \textbf{(C.2.32)}$$

კერძოდ

$$H_{2n}(z)=(-1)^n 2^n L_n^{-\frac{1}{2}}\left(z^2\right) \qquad \textbf{(C.2.33)}$$

$$H_{2n+1}(z)=(-1)^n 2^{2n+1} z L_n^{\frac{1}{2}}\left(z^2\right) \qquad \textbf{(C.2.34)}$$

უიტეკერის ფუნქციის ასიმპტოტური ფორმულა დიდი z-ებისთვის ($|\arg(z)|<\pi$) მოიცემა ფორმულით

$$W_{\mu k}(z)=e^{-\frac{z}{2}} z^k\left(1+O\left(z^{-1}\right)\right) \qquad \textbf{(C.2.35)}$$

ამ თავის ბოლოს მოვიტანოთ დამტკიცების გარეშე ზოგიერთი ინტეგრალის მნიშვნელობები, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

ა) $$J_{\alpha\gamma}^{\nu}=\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^\nu F(\alpha,\gamma,kz)dz=\Gamma(\gamma+1)\lambda^{-\gamma-1}F\left(\alpha,\nu+1,\gamma,\frac{k}{\lambda}\right); \qquad \textbf{(C.2.36)}$$

(C.2.36) ინტეგრალის კრებადობისათვის აუცილებელია მოვითხოვოთ, რომ $\operatorname{Re}\nu>-1;\ \operatorname{Re}\lambda>|\operatorname{Re}k|$.

ბ) $$J_\nu=\int_0^\infty e^{-kz} z^{\nu-1}\left[F(-n,\gamma,kz)\right]^2 dz;\ \operatorname{Re}\nu>0, n=1,2,3,\ldots \qquad \textbf{(C.2.37)}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$J_\nu=\frac{\Gamma(\nu)n!}{k^\nu\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}\left\{1+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{n(n-1)\ldots(n-s)(\gamma-\nu-s-1)(\gamma-\nu-s)\ldots(\gamma-\nu+s)}{\left[(s+1)!\right]^2\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+s)}\right\}$$

(C.2.38)

გ) $$J=\int_0^\infty e^{-\lambda z} z^{\gamma-1}F(\alpha,\gamma;kz)F(\alpha',\gamma;k'z)dz \qquad \textbf{(C.2.39)}$$

აქაც შეიძლება ჩვენება, რომ

$$J=\Gamma(\gamma)\lambda^{\alpha+\alpha'-\gamma}(\lambda-k)^{-\alpha}(\lambda-k')^{-\alpha'}F\left(\alpha,\alpha',\gamma,\frac{kk'}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right) \qquad \textbf{(C.2.40)}$$

როცა $\alpha=n;\ n=0,1,2\ldots$(ან $\alpha'=n;\ n=0,1,2\ldots$), მაშინ **(C.2.40)** გამოსახულება შეიძლება მიყვანილ იქნას შემდეგ სახემდე

$$J=\frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\gamma+n-\alpha')}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(\gamma-\alpha')}\lambda^{-n+\alpha'-\gamma}(\lambda-k)^n(\lambda-k')^{-\alpha'}\times$$
$$\times F\left(-n,\alpha',-n+\alpha'+1-\gamma,\frac{\lambda(\lambda-k-k'')}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right) \qquad \textbf{(C.2.41)}$$

C.3. ბესელისა და ეირის ფუნქციები.

ბესელის ფუნქციები წარმოადგენენ ბესელის განტოლების

$$\frac{d^2J_p}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dJ_p}{dz}+\left(1-\frac{p^2}{z^2}\right)J_p=0 \qquad \textbf{(C.3.1)}$$

ამონახსნებს. ამ განტოლების ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი განისაზღვრება შემდეგი მწკრივით

$$J_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k} \qquad \textbf{(C.3.2)}$$

და ეწოდება p რიგის პირველი გვარის *ბესელის ფუნქცია.* თუ p არამთელი რიცხვია, მაშინ $J_p(z)$ და $J_{-p}(z)$ წრფივად დამოუკიდებელია ამონახსნებია. ამ შემთხვევაში **(C.3.1)** განტოლების ზოგადი ამონახსნია

$$J(z)=AJ_p(z)+BJ_{-p}(-z) \qquad \textbf{(C.3.3)}$$

სადაც A და B ნებისმიერი მუდმივებია.

ბესელის ფუნქცია დაკავშირებულია გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციასთან შემდეგი თანაფარდობით

$$J_p(z)=\frac{1}{\Gamma(p+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^p e^{-iz}F\left(\frac{1}{2}+p,1+2p;2iz\right) \qquad \textbf{(C.3.4)}$$

თუ $p=n$ მთელი რიცხვია, მაშინ $J_n(z)$ და $J_{-n}(z)$ ამონახსნები ერთმანეთთან ასე არიან დაკავშირებული

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z) \qquad \textbf{(C.3.5)}$$

დიდი z-თვის $J_p(z)$ ფუნქციას შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გააჩნია

$$\underset{z\to\infty}{J_p(z)}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[\cos\left(z-\frac{\pi p}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(z^{-1}\right)\right] \qquad \textbf{(C.3.6)}$$

თუ p არამთელი რიცხვია, მაშინ **(C.3.1)** განტოლების ერთ-ერთ ამონახსნად იღებენ p რიგის *ნეიმანის ფუნქციას* (ანუ ბესელის მეორე გვარის ფუნქციას)

$$N_p(z)=\frac{J_p(z)\cos p\pi-J_{-p}(z)}{\sin p\pi} \qquad \textbf{(C.3.7)}$$

$N_p(z)$ ნეიმანის და $J_p(z)$ ბესელის ფუნქციები ასევე წარმოადგენენ **(C.3.1)** განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს.

(C.3.1) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნად ასევე იხილავენ *ჰანკელის პირველი და მეორე გვარის ფუნქციებს* (ანუ ბესელის მესამე გვარის ფუნქციებს)

$$H_p^{(1)}(z)=i\frac{J_p(z)e^{-ip\pi}-J_{-p}(z)}{\sin p\pi},\ H_p^{(2)}(z)=-i\frac{J_p(z)e^{ip\pi}-J_{-p}(z)}{\sin p\pi} \qquad \textbf{(C.3.8)}$$

ამა თუ იმ ფუნქციის **(C.3.1)** განტოლების დამოუკიდებელ ამონახსნად არჩევას განსაზღვრავს ამ ფუნქციების ყოფაქცევა არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის. დიდი z-თვის ჰანკელის ფუნქციებს შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გააჩნიათ

$$\underset{z\to\infty}{N_p^{(1)}(z)}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(|z|^{-1}\right)\right] \qquad \textbf{(C.3.9)}$$

$$\underset{z\to\infty}{N_p^{(2)}(z)}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{-i\left(z-\frac{p\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}\left[1+O\left(|z|^{-1}\right)\right] \qquad \textbf{(C.3.10)}$$

ბესელის ფუნქციები, რომელთა ინდექსი მთელი რიცხვის ნახევარია, ელემენტარულ ფუნქციებში გამოისახებიან. ასე მაგალითად, ნებისმიერი მთელი l-თვის

$$J_{l+1/2}(z) = (-1)^l \sqrt{\frac{2z}{\pi}} z^l \left(\frac{d}{zdz} \right)^l \left(\frac{\sin z}{z} \right) \qquad \textbf{(C.3.11)}$$

$$J_{-l-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} z^l \left(\frac{d}{zdz} \right)^l \left(\frac{\cos z}{z} \right) \qquad \textbf{(C.3.12)}$$

ჩვეულებრივ **(C.3.11)** და **(C.3.12)** ფუნქციების ნაცვლად იყენებენ შემდეგ *სფერულ ბესელის ფუნქციებს*

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) = (-1)^l z^l \left(\frac{d}{zdz} \right)^l \left(\frac{\sin z}{z} \right) \qquad \textbf{(C.3.13)}$$

$$\eta_l(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-l-1/2}(z) = (-1)^{l+1} z^l \left(\frac{d}{zdz} \right)^l \left(\frac{\cos z}{z} \right) \qquad \textbf{(C.3.14)}$$

თუ $J_p(z)$ არის **(C.3.1)** ბესელის განტოლების ამონახსნი, მაშინ $J_p(iz)$ არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI}{dz} - \left(1 + \frac{p^2}{z^2} \right) I = 0 \qquad \textbf{(C.3.15)}$$

ამ განტოლების ამონახსნს შემდეგი მწკრივის სახით ირჩევენ

$$I_p(z) = J_p(iz) e^{-i\frac{p\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma(k+p+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{p+2k} \qquad \textbf{(C.3.16)}$$

$I_p(z)$ ფუნქციას ეწოდება ბესელის პირველი გვარის მოდიფიცირებული ფუნქცია. თუ p არამთელი რიცხვია, მაშინ $I_p(z)$ და $I_{-p}(z)$ წრფივად დამოუკიდებელია ამონახსნებია, რომელთა საშუალებით **(C.3.15)** განტოლების ზოგადი ამონახსნი. თუ $p = n$ მთელი რიცხვია, მაშინ

$$I_p(z) = I_{-p}(z) \qquad \textbf{(C.3.17)}$$

პირველი გვარის ბესელის მოდიფიცირებული ფუნქცია დაკავშირებულია გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციასთან შემდეგი თანაფარდობით

$$I_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^p e^{-z} F\left(\frac{1}{2} + p, 1 + 2p; 2z \right) \qquad \textbf{(C.3.18)}$$

ხშირად **(C.3.15)** განტოლების მეორე დამოუკიდებელ ამონახსნად არამთელი p-თვის განიხილავენ შემდეგ ფუნქციას

$$K_p(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-p}(z) - I_p(z)}{\sin p\pi} \qquad \textbf{(C.3.19)}$$

რომელსაც *მაკდონალდის ფუნქცია* ანუ მეორე გვარის ბესელის მოდიფიცირებული ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციას შემდეგი ყოფაქცევა აქვს $z \to \infty$-თვის და $z \to 0$-თვის

$$\underset{z \to \infty}{K_p(z)} = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[1 + O\left(z^{-1}\right) \right], \quad z > 0 \qquad \textbf{(C.3.20)}$$

$$K_p(z) \underset{z\to 0}{=} \frac{1}{z}; \quad z > 0 \qquad \textbf{(C.3.21)}$$

ბესელის ფუნქციებთან დაკავშირებულია ე.წ. $Ai(z)$ ეირის ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს

$$W'' - zW = 0 \qquad \textbf{(C.3.22)}$$

გვაქვს შემდეგი კავშირი ეირის და ბესელის ფუნქციებს შორის

$$Ai(z) = \frac{1}{3}\sqrt{z}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) - I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] = \pi^{-1}\sqrt{\frac{z}{3}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \qquad \textbf{(C.3.23)}$$

$$Ai(-z) = \frac{1}{3}\sqrt{z}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\right] \qquad \textbf{(C.3.24)}$$

ხოლო მისი წარმოებულისათვის გვაქვს ფორმულა

$$Ai'(z) = -\pi^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{3}}\right)K_{2/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \qquad \textbf{(C.3.25)}$$

ეირის ფუნქციას არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის შემდეგი ყოფაქცევა აქვს

$$Ai(z) \underset{\lim z\to\infty}{=} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{z^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}} \qquad \textbf{(C.3.26)}$$

C.4. ლეჟანდრის პოლინომები.

ლეჟანდრის პოლინომები $P_l(\cos\theta)$ ასე განიმარტებიან

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{(d\cos\theta)^l}\left(\cos^2\theta - 1\right)^l \qquad \textbf{(C.4.1)}$$

ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l}{d\theta}\right) + l(l+1)P_l = 0 \qquad \textbf{(C.4.2)}$$

ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები ასე განიმარტებიან

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\frac{d^m P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^m} = \frac{1}{2^l l!}\sin^m\theta\frac{d^{l+m}}{(d\cos\theta)^{l+m}}\left(\cos^2\theta - 1\right)^l \qquad \textbf{(C.4.3)}$$

ან ეკვივალენტური ფორმით

$$P_l^m(\cos\theta) = (-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!2^l l!}\sin^{-m}\theta\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}\left(\cos^2\theta - 1\right)^l \qquad \textbf{(C.4.4)}$$

ამასთან $m = 0,1,\ldots,l$. ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_l^m}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P_l^m = 0 \qquad \textbf{(C.4.5)}$$

ლეჟანდრის პოლინომები და ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ ორთონორმირების პირობებს

$$\int_{-1}^{1} P_k(u)P_l(u)du = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl} \tag{C.4.6}$$

$$\int_{-1}^{1} P_k^m(u)P_l^m(u)du = \frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{kl} \tag{C.4.7}$$

სადაც

$$u = \cos\theta \tag{C.4.8}$$

ლეჟანდრის პოლინომები და ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობებს

$$(l+1)P_{l+1}(u) + lP_{l-1}(u) = (2l+1)uP_l(u) \tag{C.4.9}$$

$$\left(1-u^2\right)\frac{dP_l}{du} = l\left(P_{l-1} - uP_l\right) = (l+1)\left(uP_l - P_{l+1}\right) \tag{C.4.10}$$

$$(2l+1)uP_l^m = (l+1-m)P_{l+1}^m + (l+m)P_{l-1}^m \tag{C.4.11}$$

$$\left(1-u^2\right)\frac{dP_l^m}{du} = -luP_l^m + (l+m)P_{l-1}^m = (l+1)uP_l^m - (l+1-m)P_{l+1}^m \tag{C.4.12}$$

ლეჟანდრის პოლინომების და ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომების კერძო მნიშვნელობები

$$P_l(1) = 1;\ P_l(-1) = (-1)^l \tag{C.4.13}$$

$$P_l^m(1) = P_l^m(-1) = 0: \quad m \neq 0 \tag{C.4.14}$$

$$P_l^m(0) = \begin{cases} (-1)^p \dfrac{(2p+2m)!}{2^l p!(p+m)!}: & l-m = 2p; \\ 0; & l-m = 2p+1 \end{cases} \tag{C.4.15}$$

ლეჟანდრის პოლინომების პირველი ხუთი მნიშვნელობა

$$P_0 = 1;\ P_1 = u;\ P_2 = \frac{1}{2}\left(3u^2-1\right);\ P_3 = \frac{1}{2}\left(5u^2-3u\right);\ P_4 = \frac{1}{8}\left(35u^4-30u^2+3\right) \tag{C.4.16}$$

C.5. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია განიმარტება შემდეგი მწკრივით, როცა $|z| < 1$

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots \tag{C.5.1}$$

ზემოთ განხილული გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია **(C.2.1)** მიიღება **(C.5.1)** ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციიდან შემდეგი ზღვრული გადასვლით

$$F(\alpha,\gamma;z) = \lim_{\beta\to\infty} F\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{z}{\beta}\right) \tag{C.5.2}$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ლიტერატურაში ხშირად ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციას აღნიშნავენ ასეც ${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;z)$, ხოლო გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას კი შემოაქვთ აღნიშვნა ${}_1F_1(\alpha,\gamma;z)$. ამ აღნიშვნებში F ასოს მარცნივ და მარჯვნივ ინდექსები სათანადოდ

მიუთითებენ პარამეტრების რიცხვს **(C.5.1)** და **(C.2.1)** გაშლების მრიცხველში და მნიშვნელში.

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია წარმოადგენს ერთ-ერთ კერძო ამონახსნს შემდეგი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისა

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]u' - \alpha\beta u = 0 \qquad \textbf{(C.5.3)}$$

α და β პარამეტრები ნებისმიერია $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ ფუნქციაში, ხოლო $\gamma \neq 0,-1,-2,\ldots$ ცხადია, რომ $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ ფუნქცია სიმეტრიულია α და β პარამეტრების მიმართ.

(C.5.3) განტოლების მეორე კერძო ამონახსნია

$$u = z^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1, \alpha-\gamma+1, 2-\gamma, z) \qquad \textbf{(C.5.4)}$$

რომელსაც გააჩნია განსაკუთრებული $z=0$ წერტილი.

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობანი

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z) \qquad \textbf{(C.5.5)}$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z) = (1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma;\frac{z}{z-1}\right) \qquad \textbf{(C.5.6)}$$

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-z)+ \\ &+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,1-z) \end{aligned} \qquad \textbf{(C.5.7)}$$

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma;z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\alpha+1-\gamma,\alpha+1-\beta,\frac{1}{z}\right)+ \\ &+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}F\left(\beta,\beta+1-\gamma,\beta+1-\alpha,\frac{1}{z}\right) \end{aligned} \qquad \textbf{(C.5.8)}$$

შევნიშნოთ, რომ **(C.5.8)** ფორმულა, რომელიც აკავშირებს z და $1/z$-ს , გამოსახავს $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ ფუნქციას მწკრივის სახით, რომელიც იკრიბება $|z|>1$-თვის ანუ წარმოადგენს საწყისი **(C.5.1)** მწკრივის ანალიზურ გაგრძელებას. თუ (ან $\beta = n;\ n = 0,1,2\ldots$), მაშინ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია დადის n რიგის პოლინომზე და შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით

$$F(-n,\beta,\gamma,z) = \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+n-1)}\frac{d^n}{dz^n}\left[z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}\right] \qquad \textbf{(C.5.9)}$$

ეს პოლინომები მამრავლის სიზუსტით ემთხვევიან *იაკობის პოლინომებს,* რომლებიც შემდეგნაირად არიან განმარტებული

$$\begin{aligned} P_n^{(a,b)}(z) &= \frac{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}{n!}F\left(-n,a+b+n+1,a+1,\frac{1-z}{z}\right) = \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-z)^{-a}(1+z)^{-b}\frac{d^n}{dz^n}\left[(1-z)^{a+n}(1+z)^{b+n}\right] \end{aligned} \qquad \textbf{(C.5.10)}$$

$a=b=0$-თვის იაკობის პოლინომები ემთხვევიან ლეჟანდრის პოლინომებს, $n=0$-თვის კი $P_0^{(a,b)}=1$

D.მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულები

თუ $x << 1$, მაშინ პირველ მიახლოებაში სამართლიანია შემდეგი მიახლოებითი ფორმულები:

1) $\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x$; 2) $(1 \pm x)^2 \approx 1 \pm 2x$; 3) $(1 \pm x)^3 \approx 1 \pm 3x$; 4) $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x$;

5) $\sqrt[3]{1 \pm x} \approx 1 \mp \frac{1}{3}x$; 6) $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}x$; 7) $\sqrt{1 - x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$;

8) $\frac{1}{1 - x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$; 9) $\ln(1 + x) \approx x$; 10) $\ln\frac{1 + x}{1 - x} \approx 2x$

E. ენერგიის ერთეულები

ერთეულები	ერგი	ჯოული	კვატ.საათი	კალორია	ევ	მაე
ერგი	1	10^{-7}	$2{,}78 \cdot 10^{-14}$	$2{,}38 \cdot 10^{-8}$	$6{,}24 \cdot 10^{11}$	$6{,}7 \cdot 10^{2}$
ჯოული	10^{7}	1	$2{,}78 \cdot 10^{-7}$	0,239	$6{,}24 \cdot 10^{18}$	$6{,}70 \cdot 10^{9}$
კვატ.საათი	$3{,}6 \cdot 10^{13}$	$3{,}6 \cdot 10^{6}$	1	$8{,}60 \cdot 10^{5}$	$2{,}25 \cdot 10^{25}$	$2{,}41 \cdot 10^{16}$
კალორია	$4{,}18 \cdot 10^{7}$	4,185	$1{,}16 \cdot 10^{-6}$	1	$2{,}61 \cdot 10^{19}$	$2{,}80 \cdot 10^{16}$
ელექტრონ-ვოლტი (ევ)	$1{,}60 \cdot 10^{-12}$	$1{,}60 \cdot 10^{-19}$	$4{,}45 \cdot 10^{-26}$	$3{,}83 \cdot 10^{-20}$	1	$1{,}07 \cdot 10^{-9}$
მასის ატომური ერთეული (მაე)	$1{,}49 \cdot 10^{-3}$	$1{,}49 \cdot 10^{-10}$	$4{,}14 \cdot 10^{-17}$	$3{,}56 \cdot 10^{-11}$	$9{,}31 \cdot 10^{8}$	1

F. ძირითადი ფიზიკური მუდმივები

1	სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში	$c = 2{,}998 \cdot 10^{8}$ მ/წმ
2	გრავიტაციული მუდმივა	$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ მ³/კგ.სმ²
3	ავოგადროს რიცხვი	$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23}$ მოლ⁻¹
4	ელექტრონის მუხტი	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ კულონი
5	ელექტრონის მასა	$m_e = 0{,}911 \cdot 10^{-27}$ გ $= 0{,}511$ მევ $= 5{,}486 \cdot 10^{-4}$ მაე
6	პროტონის მასა	$m_p = 1{,}673 \cdot 10^{-24}$ გ $= 938{,}28$ მევ $= 1{,}007$ მაე
7	პლანკის მუდმივა	$h = 6{,}625 \cdot 10^{-27}$ ერგი.წმ
8	რიდბერგის მუდმივა უსასრულო მასის ბირთვის მქონე ატომისათვის	$R_{\infty} = 109737{,}31$ სმ⁻¹
9	რიდბერგის მუდმივა წყალბადისათვის	$R_H = 109677{,}576$ სმ⁻¹
10	ბორის პირველი ორბიტის რადიუსი	$r_1 = 0{,}529 \cdot 10^{-8}$ სმ
11	წყალბადის ატომის იონიზაციის ენერგია	$I_0 = 13{,}56$ ევ
12	კომპტონის ტალღის სიგრძე ელექტრონისათვის	$\lambda_c = 2{,}426 \cdot 10^{-10}$ სმ
13	ელექტრონის კლასიკური რადიუსი	$r_e = 2{,}82 \cdot 10^{-13}$ სმ
14	ნაზი სტრუქტურის მუდმივა	$\alpha = \dfrac{1}{137{,}036}$
15	ბორის მაგნეტონი	$\mu_B = 0{,}927 \cdot 10^{-20}$ ერგი/გაუსი $= 0{,}927 \cdot 10^{-23}$ ჯოული/ტესლა

16	ბირთვული მაგნეტონი	$\mu_N = 5{,}051 \cdot 10^{-24}$ ერგი/გაუსი $= 5{,}051 \cdot 10^{-27}$ ჯოული/ტესლა
17	მაგნიტური მომენტი ა)ელექტრონის ბ)პროტონის გ) ნეიტრონის დ) დეიტრონის	ა) $\mu_e = 1{,}00116\mu_B$ ბ) $\mu_p = 2{,}7928\mu_N$ გ) $\mu_n = -1{,}913\mu_N$ დ) $\mu_\alpha = 0{,}8574\mu_N$
18	გირომაგნიტური მამრავლი ა)ელექტრონის ბ)პროტონის გ) ნეიტრონის დ) დეიტრონის	ა) $g_e = 2{,}0022$ ბ) $g_p = 5{,}5855$ გ) $g_n = -3{,}8263$ დ) $g_\alpha = 0{,}8574$
19	ელექტრული მუდმივა	$\varepsilon_0 = 0{,}885 \cdot 10^{-11}$ ფ/მ
20	მაგნიტური მუდმივა	$\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ ჰენრი//ნ
21	ერთი ელექტრონვოლტის შესაბამისი რხევის სიხშირე	$2{,}41804 \cdot 10^{14}$ ჰერცი
22	ერთი ელექტრონვოლტის შესაბამისი ტემპერატურა	4604,9 კელვინი

G. ორატომიანი მოლეკულის მუდმივები

მოლეკულა	ძირითადი თერმი	ბირთვებს შორის მანძილი	რხევის სიხშირე $\omega, 10^{14}$ წმ-1	ანჰარმონიულობა $x, 10^{-3}$	დისოციაციის ენერგია D, ევ
H_2	$^1\Sigma$	74,1	8,279	28,5	4,48
N_2	$^1\Sigma$	109,4	4,445	6,15	7,37
O_2	$^3\Sigma$	120,7	2,977	7,65	5,08
F_2	$^1\Pi$	128,2	2,147	8,51	1,6
P_2	$^1\Sigma$	189,4	1,47	3,59	5,03
S_2	$^3\Sigma$	188,9	1,367	3,93	4,4
Cl_2	$^1\Sigma$	198,8	1,064	7,09	2,48
Br_2	$^1\Sigma$	228,3	0,609	3,31	1,97
I_2	$^1\Sigma$	266,6	0,404	2,84	1,54
HF	$^1\Sigma$	91,7	7,796	21,8	5,8
HCl	$^1\Sigma$	127,5	5,632	17,4	4,43
HBr	$^1\Sigma$	141,3	4,991	17,1	3,75
HI	$^1\Sigma$	160,4	4,350	17,2	3,06
CO	$^1\Sigma$	112,8	4,088	6,22	9,7
NO	$^2\Pi$	115	3,590	7,55	5,29
OH	$^2\Pi$	97,1	7,036	22,2	4,35

ლიტერატურა

1. **D.J. Griffits. ’’Introduction to Quantum Mechanics’’. Second Edition. Pearson Education International. New Jersey (USA). 2005.**

2. W. Greiner. ’’Quantum Mechanics’’. Fourth Edition. Springer. 2001.

3. G.L.Squires. ’’Problems in quantum mechanics’’. Cambridge. University Press. 2002.

4. Y.Peleg, R.Pnini, E. Zaarur. ’’Theory and problems of Quantum Mechanics’’. Schaum’s Outline Series. McGRAW-HILL. New York. 1998.

5. F.Constantinescu, E.Magyari. ’’Problems in Quantum Mechanics’’. Pergamon Press. Oxford. 1971.

6. ი.ვაშაკიძე, ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი. ”კვანტური მექანიკა”. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა 1978.

7. В. М. Галицкий. ”Задачи по квантовой механике”. 3 -е издание. Едиториал Москва. Часть I. 2001.

8. В. М. Галицкий, Б. М. Карнаков, В. И. Коган. ”Задачи по квантовой механике”. ”Наука”. Москва. 1981.

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Курс теоретической физики т **III.** Квантовая механика. 6 -е издание. ФИЗМАТЛИТ. Москва. 2004.

10. Л. Д.Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. ОГИЗ. Москва. 1948.

11. П. И. Елютин, В. Д. Кривченков. ”Квантовая механика с задачами” ФИЗМАТЛИТ. Москва. 2000.

12. П. С. Парфенов. ”Квантовая механика”. ИТМО. Санкт-Петербург. 2012.

13. Т. И. Оришич. Филиппова Л. Г. ”Сборник задач с решениями по квантовой физике”. Новосибирский Университет. 1991.

14. И. И. Гольдман, В. Д. Кривченков. ”Сборник задач по квантовой механике”. ГИТТЛ Москва. 1957.

15. И. Е. Иродов. ’Задачи по квантовой механике”. ”Высшая школа”. Москва. 1991.

16. И. Е. Иродов. ”Квантовая физика. Основные законы”. том 5.ЛитРес. Москва. 2001.

17. Л. Г. Гречко и др. ”Сборник задач по теоретической физике”. 2 -е издание Высшая школа”. Москва. 1984.

18. З. Флюгге. ”Задачи по квантовой механике”. том 5. ”Мир”. Москва. 1991.

19. Мин Чен. ”Задачи по физике с решениями". ”Мир”. Москва. 1978.